Вопрос 01
Критерий полноты системы функций алгебры логики

Опр. Система функций $\{f_1, f_2, ..., f_s, ...\}$ из P_2 называется функционально полной, если любая булева функция может быть записана в виде формулы через функции этой системы.

Обозначим через T_0 класс всех булевых функций $f(x_1,...,x_n)$, сохраняющих константу 0, т.е. функций, для которых выполнено равенство $f(0,...,0)=0$. Обозначим через T_1 класс всех булевых функций $f(x_1,...,x_n)$, сохраняющих константу 1, т.е. функций, для которых выполнено равенство $f(1,...,1)=1$.

Обозначим через S класс всех самодвойственных функций, т.е. функций f из P_2, таких что $f^*=f$, т.е. $\overline{f}(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)=f(x_1,...x_n)$.

Лемма 1. Если $f(x_1,...,x_n)\notin S$, то из нее путем подстановки функций x и $\overline{x}$ можно получить несамодвойственную функцию одного переменного, т.е. константу.

Доказательство. Так как $f\notin S$, то найдется набор $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ такой, что $f(\overline{\alpha}_1,...,\overline{\alpha}_n)=f(\alpha_1,...,\alpha_n)$. Рассмотрим функции $\varphi_i(x)=x^{\alpha_i}$ ($i=1,...,n$) и положим $\varphi(x)=f(\varphi_1(x),...,\varphi_n(x))$. Мы имеем

$$\varphi(0)=f(\varphi_1(0),...,\varphi_n(0))=f(0^{\alpha_1},...,0^{\alpha_n})=f(\overline{\alpha}_1,...,\overline{\alpha}_n)=f(\alpha_1,...,\alpha_n)=f(\varphi_1(1),...,\varphi_n(1))=\varphi(1)$$

□

Опр. Функция $f(x_1,...x_n)$ называется монотонной, если $\forall$ двух наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$: $\tilde{\alpha}\prec=\tilde{\beta}$, имеет место равенство $f(\tilde{\alpha})\le f(\tilde{\beta})$.

Обозначим через M множество всех монотонных функций.

Опр. Наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ соседние (по i-ой координате), если $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},\alpha_i,\alpha_{i+1},...,\alpha_n)$ и $\tilde{\beta}=(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},\overline{\alpha}_i,\alpha_{i+1},...,\alpha_n)$.

Лемма 2. Если $f(x_1,...,x_n)\notin M$, то из нее путем подстановки констант 0 и 1 и функции x можно получить функцию $\overline{x}$.

Доказательство. Сначала покажем, что найдется пара соседних наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ таких, что $\tilde{\alpha}\prec=\tilde{\beta}$ и $f(\tilde{\alpha})>f(\tilde{\beta})$. В самом деле, т.к. $f\notin M$, то $\exists$ наборы $\tilde{\alpha}^1$ и $\tilde{\beta}^1$: $\tilde{\alpha}^1\prec=\tilde{\beta}^1$ и $f(\tilde{\alpha}^1)>f(\tilde{\beta}^1)$. Если наборы $\tilde{\alpha}^1$ и $\tilde{\beta}^1$ – соседние, то наша цель достигнута. Если $\tilde{\alpha}^1$ и $\tilde{\beta}^1$ не являются соседними, то набор $\tilde{\beta}^1$ отличается от набора $\tilde{\alpha}^1$ в t ($t>1$) координатах, причем эти t координат в наборе $\tilde{\alpha}^1$ имеют значение 0, а в наборе $\tilde{\beta}^1$ – значение 1. В силу этого между $\tilde{\alpha}^1$ и $\tilde{\beta}^1$ можно вставить $t-1$ промежуточных наборов $\tilde{\alpha}^2,\tilde{\alpha}^3,...,\tilde{\alpha}^t$ таких, что $\tilde{\alpha}^1\prec=\tilde{\alpha}^2\prec=...\prec=\tilde{\alpha}^t\prec=\tilde{\beta}^1$. Очевидно, что наборы, стоящие в этой цепочке рядом будут соседними. Т.к. $f(\tilde{\alpha}^1)>f(\tilde{\beta}^1)$, то по крайней мере на одной из этих пар соседних наборов – обозначим их через $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ ($\tilde{\alpha}\prec=\tilde{\beta}$) – будет $f(\tilde{\alpha})>f(\tilde{\beta})$. Предположим, что данные наборы имеют соседство по i-ой координате $\Rightarrow$ $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},...,\alpha_n)$, $\tilde{\beta}=(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},...,\alpha_n)$. Рассмотрим $\varphi(x)=f(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},x,\alpha_{i+1},...,\alpha_n)$. Мы имеем $\varphi(0)=f(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},...,\alpha_n)=f(\tilde{\alpha})>f(\tilde{\beta})=f(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},...,\alpha_n)=\varphi(1)$. Последнее означает, что $\varphi(0)=1$, а $\varphi(1)=0$, т.е. $\varphi(x)=\overline{x}$.

□

Обозначим через L класс всех линейных функций, т.е. функций, имеющих вид: $f(x_1,...,x_n) = c_0 + c_1x_1 + ... + c_nx_n$, где $c_i = \{0,1\}$ ($i = 0,...,n$), существенные переменные входят с коэффициентом 1, фиктивные – с коэффициентом 0.

Лемма 3. Если $f(x_1,...,x_n) \notin L$, то из нее путем подстановки констант 0 и 1 и функций вида x и $\bar{x}$, а также, быть может, путем навешивания отрицания над f, можно получить функцию $x_1 \& x_2$.

Доказательство. Возьмем полином Жегалкина для f:
$f(x_1,...,x_n) = \sum\limits_{(i_1,...,i_s)} \alpha_{i_1...i_s} x_{i_1}...x_{i_s}$. В силу нелинейности полинома в нем найдется член, содержащий не менее двух множителей. Без ограничения общности можно считать, что среди этих множителей присутствуют x_1 и x_2. Тогда можно преобразовать полином следующим образом:

$$\sum_{(i_1,...,i_s)} \alpha_{i_1...i_s} x_{i_1}...x_{i_s} = x_1x_2f_1(x_3,...,x_n) + x_1f_2(x_3,...,x_n) + x_2f_3(x_3,...,x_n) + f_4(x_3,...,x_n),$$

где в силу единственности полинома $f_1(x_3,...,x_n) \neq 0$.

Пусть $\alpha_3,...,\alpha_n$: $f(\alpha_3,...,\alpha_n) = 1$. Тогда
$\varphi(x_1,x_2) = f(x_1,x_2,\alpha_3,...,\alpha_n) = x_1x_2 + \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma$, где α, β, γ – константы, равные 0 или 1. Рассмотрим функцию $\psi(x_1,x_2)$, получаемую из $\varphi(x_1,x_2)$ следующим образом:
$\psi(x_1,x_2) = \varphi(x_1+\beta, x_2+\alpha) + \alpha\beta + \gamma$. Очевидно, что

$$\varphi(x_1+\beta, x_2+\alpha) + \alpha\beta + \gamma = (x_1+\beta)(x_2+\alpha) + \alpha(x_1+\beta) + \beta(x_2+\alpha) + \gamma + \alpha\beta + \gamma = x_1x_2.$$

Следовательно, $\psi(x_1,x_2) = x_1 \& x_2$.

$\square$

Теорема (о функциональной полноте). Для того чтобы система функций B была полной, необходимо и достаточно, чтобы она целиком не содержалась ни в одном из пяти замкнутых классов T_0, T_1, S, M и L.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть B полна, т.е. $[B] = P_2$. Допустим, что B содержится в одном из указанных классов – обозначим его через R, т.е. $B \subseteq R$. Тогда в силу свойств замыкания и замкнутости R имеем $P_2 = [B] \subseteq [R] = R$. Значит $R = P_2$, что не так. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть B целиком не содержится ни в одном из пяти указанных классов. Тогда из B можно выделить подсистему B', содержащую не более пяти функций, которая обладает этим свойством. Для этого возьмем в B функции f_i, f_j, f_k, f_l, которые не принадлежат соответственно классам T_0, T_1, S, M и L, и положим $B' = \{f_i, f_j, f_k, f_l, f_m\}$. Можно считать, что все эти функции зависят от одних и тех же переменных $x_1,...,x_n$.

Доказательство достаточности будем проводить в три этапа.

I. Построение при помощи функций f_i, f_j и f_k констант 0 и 1. Рассмотрим функцию $f_i \notin T_0$. Возможны два случая:

1. $f_i(1,...,1) = 1$. Тогда $\varphi(x) = f_i(x,...,x)$ есть константа 1, ибо $\varphi(0) = f_i(0,...,0) = 1$, $\varphi(1) = f_i(1,...,1) = 1$. Вторая константа получается из f_j: $f_j(1,...,1) = 0$.
2. $f_i(1,...,1) = 0$. Тогда $\varphi(x) = f_i(x,...,x)$ есть $\bar{x}$, ибо $\varphi(0) = f_i(0,...,0) = 1$, $\varphi(1) = f_i(1,...,1) = 0$. Возьмем f_k ($f_k \notin S$). Т.к. мы имеем $\bar{x}$, то в силу леммы 1 из f_k мы можем получить константу. Поскольку мы располагаем $\bar{x}$, то находим и вторую константу. Итак, в обоих случаях мы получаем константы 0 и 1.

II. Построение при помощи констант 0, 1 и функции f_m функции $\overline{x}$. Это осуществляется на основе леммы 2.

III. Построение при помощи констант 0, 1 и функций $\overline{x}$ и f_i функции $x_1 \& x_2$. Это осуществляется на основе леммы 3.

Таким образом, мы при помощи формул над B' (а значит и над B) реализовали функции $\overline{x}$ и $x_1 \& x_2$. Этим достаточность доказана.

□

Вопрос 02
Проблема полноты в k-значной логике. Алгоритм распознавания полноты

Опр. Система B функций $f_1, f_2, ..., f_s, ...$ из P_k называется функционально полной, если любая функция из P_k может быть записана в виде формулы через функции этой системы.

Теорема. Система $B = \{0,1,...,k-1, I_0(x),..., I_{k-1}(x), \min(x_1,x_2), \max(x_1,x_2)\}$ является полной в P_k, где $I_i(x) = \begin{cases} 1, \text{ при } x = i \\ 0, \text{ при } x \neq i \end{cases}$, $i = 0,1,...,k-1$.

Доказательство. Пусть $f(x_1,...,x_n)$ – произвольная функция из P_k. Для нее имеет место разложение: $f(x_1,...,x_n) = \underset{(\sigma_1,...,\sigma_n)}{\vee} I_{\sigma_1}(x_1) \,\&\, ... \,\&\, I_{\sigma_n}(x_n) \,\&\, f(\sigma_1,...,\sigma_n)$. Данная формула (правая часть) построена из функций, входящих в B.

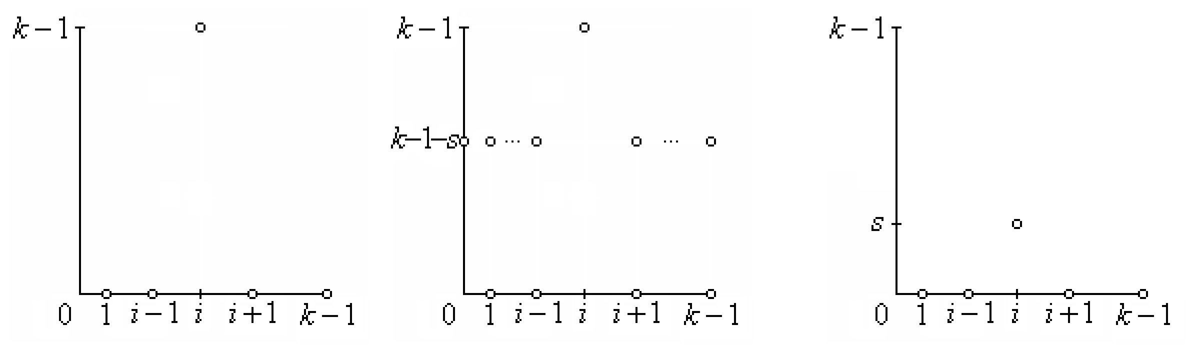
∎

Теорема. Система $B = \{\bar{x}, \max(x_1,x_2)\}$ является полной в P_k.

Доказательство. *Построение констант*. Из функции $\bar{x} = x+1$ получаем функции $x+2 = (x+1)+1$, …, $x+k-1 = (x+k-2)+1$, $x = x+k = (x+(k-1))+1$. Легко видеть, что $\max(x, x+1, ..., x+k-1) = k-1$. Отсюда при помощи $\bar{x}$ получаем остальные константы.

Построение функций одной переменной. Сначала получаем функции $I_i(x) = 1 + \max\limits_{\alpha \neq k-1-i} \{x+\alpha\}$ ($i = 0,1,...,k-1$). В самом деле, если $x = i$, то левая часть равна $k-1$, а правая часть есть $1 + \max\limits_{\alpha \neq k-1-i}\{x+\alpha\} = 1 + \max\limits_{i+\alpha \neq k-1}\{i+\alpha\} = 1+k-2 = k-1$; если $x \neq i$, то левая часть равна 0, а правая часть есть $1 + \max\limits_{\alpha \neq k-1-i}\{x+\alpha\} = 1 + (x+(k-1-x)) = k = 0$.

Введем функции $f_{s,i}(x) = \begin{cases} s, \text{ при } x = i \\ 0, \text{ при } x \neq i \end{cases}$. Покажем, что $f_{s,i}(x) = s+1+\max[I_i(x), k-1-s]$. Последнее легко усматривается из графиков.



$I_i(x)$ $\qquad$ $\max[I_i(x), k-1-s]$ $\qquad$ $s+1+\max[I_i(x), k-1-s]$

Если $g(x)$ – произвольная функция одной переменной из P_k, то $g(x) = \max\left\{f_{g(0),0}(x), f_{g(1),1}(x), ..., f_{g(k-1),k-1}(x)\right\}$, и, в частности, $\sim x = \max\left\{f_{k-1,0}(x), f_{k-2,1}(x), ..., f_{0,k-1}(x)\right\}$.

Получение $\min(x_1,x_2)$. Мы видели, что $\sim \min(x_1,x_2) = \max(\sim x_1, \sim x_2)$. Отсюда $\min(x_1,x_2) = \sim \max(\sim x_1, \sim x_2)$.

Таким образом, мы можем при помощи формул над исходной системой функций выразить любую из функций системы $\{0,1,...,k-1, I_0(x),..., I_{k-1}(x), \min(x_1,x_2), \max(x_1,x_2)\}$, относительно которой доказано, что она полная. Поэтому и система $\{\overline{x}, \max(x_1,x_2)\}$ является полной.

□

Введем обозначения: $V_k(x_1,x_2) = \max(x_1,x_2)+1$. Функция $V_k(x_1,x_2)$ называется функцией Вебба. Система $B = \{V_k(x_1,x_2)\}$ является полной. Вопрос о полноте может быть легко сведен к полноте системы из предыдущей теоремы.

Опр. Пусть M – произвольное подмножество функций из P_k. Замыканием M называется множество $[M]$ всех функций из P_k, представимых в виде формул через функции множества M.

Опр. Класс (множество) M называется функционально замкнутым, если $[M] = M$.

Замечание. Если функция $f(x_1,...,x_n)$, реализуемая формулой $U(x_1,...,x_n)$, имеет несущественную переменную x_i, то при $n > 1$ переменную x_i можно удалить, заменив функцию f равной ей функцией f', а формулу U – формулой U', получающейся из U в результате отождествления переменной x_i с любой из оставшихся переменных. Очевидно, что U' является формулой над B и реализует функцию f'.

Будем предполагать, что система B конечна: $B = \{f_1, f_2,..., f_s\}$ и, стало быть, она может быть явно задана либо перечнем таблиц, либо списком формул.

Для произвольного $p \ge 1$ обозначим $g_i^p(x_1,...,x_p) = x_i$ и через $M_{x_1 \dots x_p}$ – множество всех функций из M, зависящих от переменных $x_1,...,x_p$.

Теорема. Существует алгоритм для распознавания полноты.

Доказательство. Построим по индукции последовательность множеств $R_0, R_1,..., R_r,...$ функций от двух переменных x_1 и x_2.

Базис индукции. Положим $R_0 = \Lambda$, где Λ – пустое множество.

Индуктивный переход. Пусть уже построены множества $R_0, R_1,..., R_r$; покажем, как определяется множество R_{r+1}. Для этого выпишем функции, входящие в R_r ($r \ge 0$): $R_r = \{h_1(x_1,x_2),..., h_{s_r}(x_1,x_2)\}$ ($s_r = 0$ при $r = 0$), и для каждого $i = 1,...,s$ рассмотрим всевозможные формулы вида $f_i(H_1(x_1,x_2),..., H_n(x_1,x_2))$, где $H_l(x_1,x_2)$ есть либо функция $h_j(x_1,x_2)$ ($j = 1,...,s_r$), либо $g_\sigma^2(x_1,x_2)$.

Таким образом, просматривая $s(s_r+2)^n$ формул, мы может, получим функции, не вошедшие в R_r. Обозначим их через $h_{s_r+1}(x_1,x_2),..., h_{s_{r+1}}(x_1,x_2)$. Положим $R_{r+1} = R_r \bigcup \{h_{s_r+1}(x_1,x_2),..., h_{s_{r+1}}(x_1,x_2)\}$. Очевидно, что $R_0 \subseteq R_1 \subseteq ... \subseteq R_r \subseteq ...$.

Из построения ясно, что если $R_{r+1} = R_r$, то $R_r = R_{r+1} = ...$, т.е. цепочка множеств стабилизируется. Обозначим через r^* минимальный номер множества, начиная с которого наступает стабилизация. Тогда цепочка множеств $R_0 \subset R_1 \subset ... \subset R_{r^*}$ строго возрастает. Так как мощность R_i не больше, чем k^{k^2}, то $r^* \le k^{k^2}$. Значит, момент стабилизации может быть обнаружен через ограниченное число шагов. Рассмотрим множеств R_{r^*}. Возможны два случая.

1. R_{r^*} содержит все функции от двух переменных x_1, x_2 и, значит, содержит $V_k(x_1,x_2)$. Тогда исходная система полна.

2. R_{r^*} не содержит всех функций от двух переменных. Поскольку в этом случае $[B]_{x_1 x_2} = R_{r^*}$ (см. замечание), то $[B]$ не содержит всех функций от переменных x_1 и x_2. Следовательно, B не полна.

Из данных рассуждений легко извлекается алгоритм: строим классы $R_0, R_1, \ldots, R_{r^*}$ до момента стабилизации и рассматриваем класс R_{r^*}, по которому и определяем, имеет место полнота для B или нет.

□

Вопрос 3. Ограниченно-детерминированные (о.-д.) функции. Операции суперпозиции и обратной связи над ними. Конечная порожденность класса о.-д. функций относительно этих операций.

Определение. (P_2, C) – алгебра логики – система функций алгебры логики с операцией суперпозиции.

Определение. (P_k, C) – k-значная логика – система функций k-значной логики с операцией суперпозиции.

Определение. $(P_{\mathcal{X}_0}, C)$ – счетнозначная логика, т.е. система, содержащая константы $0, 1, \ldots, k, \ldots$ и функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, переменные которых определены на расширенном натуральном ряде $E_{\mathcal{X}_0} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, а сами функции принимают значения на $E_{\mathcal{X}_0}$, с операцией суперпозиции.

Определение. $(P_{\mathcal{C}}, C)$ – континуумзначная логика, т.е. система, содержащая константы $[0, 1]$ и функции, переменные которых определены на сегменте $[0, 1]$ и сами принимают значения на $[0, 1]$, с операцией суперпозиции.

Определение. $E_{\mathcal{C},k}$ – множество всех k-значных последовательностей α, где

$$\alpha = \{\alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(m), \ldots\},$$

$$\alpha(m) \in E_k \text{ для всех } m \ (m = 1, 2, \ldots).$$

Определение. Обозначим через $P_{\mathcal{C},k}$ множество всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, определенных на наборах $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, где $\alpha_i \in E_{\mathcal{C},k}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, и принимающих значения из $E_{\mathcal{C},k}$.

Таким образом, функции из $P_{\mathcal{C},k}$ преобразуют наборы k-значных последовательностей в k-значные последовательности. В $P_{\mathcal{C},k}$ включим также все последовательности из $E_{\mathcal{C},k}$, рассматривая их как функции, зависящие от пустого множества переменных, т.е. как константы.

Для наборов и функций мы будем дальше употреблять векторную запись. Так, обозначая набор переменных $(x_1, \ldots, x_n)$ через X, вместо $f(x_1, \ldots, x_n)$ будем писать $f(X)$. При этом значение переменной X есть вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, компонентами которого являются последовательности значности k:

$$\alpha_i = \{\alpha_i(1), \alpha_i(2), \ldots, \alpha_i(m), \ldots\} \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Будем истолковывать α как последовательность векторов

$$\alpha\{\alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(m), \ldots\},$$

где

$$\alpha(m) = (\alpha_1(m), \alpha_2(m), \ldots, \alpha_n(m)) \ (m = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, выполнено тождество

$$(\{\alpha_1(1), \ldots, \alpha_1(m), \ldots\}, \ldots, \{\alpha_n(1), \ldots, \alpha_n(m), \ldots\}) =$$
$$= \{(\alpha_1(1), \ldots, \alpha_n(1)), \ldots, (\alpha_1(m), \ldots, \alpha_n(m)), \ldots\}$$

Полученную последовательность векторов можно рассматривать как последовательность наборов $(\alpha_1(m), \alpha_2(m), \ldots, \alpha_n(m))$ или чисел в k-ичной системе счисления. Каждое из этих чисел принадлежит множеству E_N, где $N = k^n$.

Итак, функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $P_{\mathcal{C},k}$ можно рассматривать как функцию $f(X)$ из множества $P_{\mathcal{C},N}$, но зависящую от одной переменной. Таким образом, изучение функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $P_{\mathcal{C},k}$ можно свести к изучению функции $f(X)$ от одной переменной из $P_{\mathcal{C},N}$, где $N = k^n$.

Определение. Функция $f(X)$ из $P_{\mathcal{C},N}$ называется детерминированной, если каково бы ни было число m и каковы бы ни были последовательности α и β такие, что

$$\alpha(1) = \beta(1),\ \alpha(2) = \beta(2),\ \ldots,\ \alpha(m) = \beta(m),$$

значения γ и δ функции f, где $\gamma = f(\alpha)$ и $\delta = f(\beta)$, представляют собой последовательности, у которых тоже совпадают первые m членов, т.е.

$$\gamma(1) = \delta(1),\ \gamma(2) = \delta(2),\ \ldots,\ \gamma(m) = \delta(m).$$

Через $P_{\text{Д},k}$ обозначим множество всех детерминированных функций из $P_{\mathcal{C},k}$.

Детерминированную функцию можно задать с помощью дерева.

Определение. Число r классов эквивалентности, на которые разбивается множество всех поддеревьев данного дерева, называется весом детерминированной функции (весом дерева).

Определение. Детерминированная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется ограниченно-детерминированной (ОД) функцией, если она имеет конечный вес.

Класс всех ОД функций, принадлежащих $P_{\text{Д},k}$, обозначим через $P_{\text{ОД},k}$.

Для любой ОД функции соответствующие ей полное (бесконечное) занумерованное дерево можно всегда свести к конечному дереву с занумерованными ребрами и вершинами. Если в этом усеченном дереве произвести отождествление вершин с одинаковыми номерами, то получим так называемую диаграмму Мура.

Теорема 1.
Число $p(k, n, r)$ ОД функций из $P_{\mathcal{C},k}$, зависящих от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ и имеющих вес r, не превосходит $(rk)^{rk^n}$.

Доказательство.

Возьмем диаграмму Мура для ОД функции веса r. В ней из каждой вершины исходит $N = k^n$ ребер, причем α-е ребро соединено с одной из r вершин и ему приписана пара (α, γ), где $0 \leqslant \gamma \leqslant k - 1$. Таким образом, число $p(k, n, r)$ не превосходит числа диаграмм Мура вышеуказанного вида. Данные диаграммы могут быть получены следующим образом.

Возьмем r вершин, занумерованных числами $0, \ldots, r-1$ (0 – выделенная вершина), из каждой из которых исходит по $N = k^n$ ребер, занумерованных числами $0, \ldots, N-1$. Мы имеем rN ребер. Каждое ребро может быть соединено с любой из r вершин и ему может быть приписано любое из k чисел. Поэтому

$$p(k, n, r) \leqslant (rk)^{rN} = (rk)^{rk^n}.$$

$\square$

Пусть α и γ – входная и выходная величины соответственно, $\varkappa$ – состояние. Пусть переменные X, Q, Z таковы, что: X описывает значение входной величины α, Q описывает состояния $\varkappa$ и Z описывает значение выходной величины γ.

Тогда уравнения

$$Z(t) = \mathcal{F}(X(t), Q(t-1)),$$
$$Q(t) = \mathcal{G}(X(t), Q(t-1)),$$
$$Q(0) = 0$$

называют каноническими уравнениями.

Теорема 2.
Класс детерминированных функций замкнут относительно операции суперпозиции.

Теорема 3.
Класс ОД функций замкнут относительно операции суперпозиции.

Доказательство.
Так как класс ОД функций содержит тождественную функцию, то для доказательства теоремы достаточно установить, что функция $f(X)$, получаемая из ОД функций $f_0, f_1, \ldots, f_m$ по формуле $f(X) = f_0(f_1(X^1), \ldots, f_m(X^m))$, является ОД функцией.

Поскольку функция рассматривается с точностью до несущественных переменных, то можно считать, что функции $f_0, f_1, \ldots, f_m$ зависят от одних и тех же переменных $x_1, \ldots, x_n$, т.е.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_0(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Канонические уравнения для $f_0, f_1, \ldots, f_m$:

$$\begin{gathered}
z_0 = F_0(y_1(t), \ldots, y_m(t), q_1^0(t-1), \ldots, q_{l_0}^0(t-1)),\\
q_1^0 = G_1^0(y_1(t), \ldots, y_m(t), q_1^0(t-1), \ldots, q_{l_0}^0(t-1)),\\
\ldots\\
q_{l_0}^0 = G_{l_0}^0(y_1(t), \ldots, y_m(t), q_1^0(t-1), \ldots, q_{l_0}^0(t-1)),\\
q_1^0(0) = \ldots = q_{l_0}^0(0) = 0;
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
z_1 = F_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1^1(t-1), \ldots, q_{l_1}^1(t-1)),\\
q_1^1 = G_1^1(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1^1(t-1), \ldots, q_{l_1}^1(t-1)),\\
\ldots\\
q_{l_1}^1 = G_{l_1}^1(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1^1(t-1), \ldots, q_{l_1}^1(t-1)),\\
q_1^1(0) = \ldots = q_{l_1}^1(0) = 0;
\end{gathered}$$

$$\ldots$$

$$\begin{gathered}
z_m = F_m(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1^m(t-1), \ldots, q_{l_m}^m(t-1)),\\
q_1^m = G_1^m(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1^m(t-1), \ldots, q_{l_m}^m(t-1)),\\
\ldots\\
q_{l_m}^m = G_{l_m}^m(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1^m(t-1), \ldots, q_{l_m}^m(t-1)),\\
q_1^m(0) = \ldots = q_{l_m}^m(0) = 0.
\end{gathered}$$

Покажем, что f можно задать также при помощи канонических уравнений. Положим

$$\begin{gathered}
F(x_1, \ldots, x_n, q_1^0, \ldots, q_{l_0}^0, \ldots, q_1^m, \ldots, q_{l_m}^m) =\\
= F_0(F_1(x_1, \ldots, x_n, q_1^1, \ldots, q_{l_1}^1), \ldots, F_m(x_1, \ldots, x_n, q_1^m, \ldots, q_{l_m}^m), q_1^0, \ldots, q_{l_0}^0),\\
G_{ij}(x_1, \ldots, x_n, q_1^0, \ldots, q_{l_0}^0, \ldots, q_1^m, \ldots, q_{l_m}^m) =
\end{gathered}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} G_j^0(F_1(x_1, \ldots, x_n, q_1^1, \ldots, q_{l_1}^1), \ldots, F_m(x_1, \ldots, x_n, q_1^m, \ldots, q_{l_m}^m), q_1^0, \ldots, q_{l_0}^0),\ (i = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant l_0)\\ G_j^i(x_1, \ldots, x_n, q_1^i, \ldots, q_{l_i}^i),\ (i > 0,\ 1 \leqslant j \leqslant l_i). \end{array} \right.$$

Тогда уравнения

$$
\begin{aligned}
&z(t) = F(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1^0(t-1), \ldots, q_{l_0}^0(t-1), \ldots, q_1^m(t-1), \ldots, q_{l_m}^m(t-1)),\\
&q_j^i(t) = G_{ij}(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1^0(t-1), \ldots, q_{l_0}^0(t-1), \ldots, q_1^m(t-1), \ldots, q_{l_m}^m(t-1)),\\
&q_j^i(0) = 0,\ 0 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant l_i.
\end{aligned}
$$

задают функцию f.

$\square$

Определение. Детерминированная функция $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ зависит от переменной x_i с запаздыванием, если для любых входных последовательностей

$$\alpha_1 = \{\alpha_1(1), \ldots, \alpha_1(t), \ldots\}$$

$$\ldots$$

$$\alpha_n = \{\alpha_n(1), \ldots, \alpha_n(t), \ldots\}$$

и любого момента времени t значение $\gamma(t)$, где $\gamma = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, полностью определяется значениями первых t членов последовательностей $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n$ и значениями первых $t-1$ членов последовательности α_i.

Определение. ОД функция $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ зависит от переменной x_i с запаздыванием тогда и только тогда, когда f можно задать каноническими уравнениями

$$
\begin{aligned}
&z(t) = F(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_l(t-1)),\\
&q_1(t) = G_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_l(t-1)),\\
&\ldots\\
&q_l(t) = G_l(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_l(t-1)),\\
&q_1(0) = \ldots = q_l(0) = 0,
\end{aligned}
$$

в которых функция $F(x_1, \ldots, x_n, q_1, \ldots, q_l)$ как функция из P_k существенно не зависит от x_i.

Теорема 4.
Пусть $F'(x_1, \ldots, x_n, q_1, \ldots, q_l)$ – функция из P_k, определенная на множестве $\mathcal{E}$, являющемся цилиндрическим по $x_1, \ldots, x_n$, и F' допускает доопределения $F_1, \ldots, F_s$ такие, что F_j существенно не зависит от x_{i_j}, $1 \leqslant j \leqslant s$. Тогда существует такое доопределение F, которое существенно не зависит от переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$.

Если $f_1, \ldots, f_m$ – ОД функции, то операция O может быть определена через канонические уравнения. Пусть f_d зависит с запаздыванием от переменной x_j. Возьмем систему канонических уравнений для $f_1, \ldots, f_m$:

$$
\begin{aligned}
&z_1(t) = F_1(x_1(t), \ldots, x_j(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_l(t-1)),\\
&\ldots\\
&z_d(t) = F_d(x_1(t), \ldots, -, \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_l(t-1)),\\
&\ldots\\
&z_m(t) = F_m(x_1(t), \ldots, x_j(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_l(t-1)),\\
&q_1(t) = G_1(x_1(t), \ldots, x_j(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_l(t-1)),\\
&\ldots\\
&q_l(t) = G_l(x_1(t), \ldots, x_j(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_l(t-1)),\\
&q_1(0) = \ldots = q_l(0) = 0.
\end{aligned}
$$

Здесь прочерк в наборе аргументов у F_d обозначает, что F_d существенно не зависит от x_j. По этой системе канонических уравнений путем выбрасывания d-й строки и заменой переменной x_j на F_d строим новую систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
&z_1(t) = F_1(x_1(t), \ldots, F_d(x_1(t), \ldots, -, \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_l(t-1)), \ldots, x_n(t),\\
&\qquad\quad q_1(t-1), \ldots, q_l(t-1)),\\
&\ldots\\
&z_{d-1}(t) = F_{d-1}(x_1(t), \ldots, F_d(x_1(t), \ldots, -, \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_l(t-1)), \ldots, x_n(t),\\
&\qquad\quad q_1(t-1), \ldots, q_l(t-1)),\\
&\ldots\\
&z_{d+1}(t) = F_{d+1}(x_1(t), \ldots, F_d(x_1(t), \ldots, -, \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_l(t-1)), \ldots, x_n(t),\\
&\qquad\quad q_1(t-1), \ldots, q_l(t-1)),\\
&\ldots\\
&z_m(t) = F_m(x_1(t), \ldots, F_d(x_1(t), \ldots, -, \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_l(t-1)), \ldots, x_n(t),\\
&\qquad\quad q_1(t-1), \ldots, q_l(t-1)),\\
&q_1(t) = G_1(x_1(t), \ldots, F_d(x_1(t), \ldots, -, \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_l(t-1)), \ldots, x_n(t),\\
&\qquad\quad q_1(t-1), \ldots, q_l(t-1)),\\
&\ldots\\
&q_l(t) = G_l(x_1(t), \ldots, F_d(x_1(t), \ldots, -, \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_l(t-1)), \ldots, x_n(t),\\
&\qquad\quad q_1(t-1), \ldots, q_l(t-1)),\\
&q_1(0) = \ldots = q_l(0) = 0.
\end{aligned}
$$

Эта система уравнений, очевидно, определяет те же ОД функции $f'_1, \ldots, f'_{d-1}, f'_{d+1}, \ldots, f'_m$, которые были определены выше. Отсюда следует, что система ОД функций, получаемая таким образом, не зависит от выбора канонических уравнений для $f_1, \ldots, f_m$ (при условии, что F_d существенно не зависит от x_j).

Теорема 5.
Класс ОД функций замкнут относительно операции O.

Теорема 6.
Пусть для системы ОД функций $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$, *где* $m \geqslant 3$, *возможно введение обратных связей и в порядке* (z_1, x_1), (z_2, x_2), *и в порядке* (z_2, x_2), (z_1, x_1). *Тогда результаты применения операции* O *совпадают.*

Теорема 7.
Если система ОД функций $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ *содержит функции* $\{f_{d_1}, f_{d_2}, \ldots, f_{d_s}\}$, *(*$m \geqslant s+1$*; индексы попарно различны), каждая из которых зависит с запаздыванием от переменных* $x_{j_1}, \ldots, x_{j_s}$ *(индексы попарно различны), то тогда система функций, получаемая путем введения обратных связей* $(d_1, f_1), \ldots, (d_s, f_s)$ *не зависит от порядка введения обратных связей.*

Теорема 8.
Класс $P_{од,k}$ *замкнут относительно операций* C *и* O.

Литература

1. С.В. Яблонский "Введение в дискретную математику". – М.: Наука, 1986.

Вопрос 04
Алфавитное кодирование. Алгоритм распознавания однозначности алфавитного кодирования

Опр. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ — *исходный алфавит*, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ — *кодирующий алфавит,*

$A^* = \varnothing \cup A \cup A^2 \cup A^3 \cup \dots A^N \cup \dots$, $B^* = \varnothing \cup B \cup B^2 \cup B^3 \cup \dots B^N \cup \dots$

(множества всех возможных слов в алфавитах).

Тогда *алфавитным кодированием* $A^* \to B^*$ назовём отображение $\varphi : A \to B^*$ такое, что $a_i \to B_i$. Множество $\{B_1, B_2, \dots, B_r\}$ при этом называется множеством *кодовых слов* (или просто *кодом*). При этом $\varphi : a_{i1}, a_{i2} \dots a_{is} \longrightarrow B_{i1}, B_{i2}, \dots B_{is}$

Опр. Кодирование $A^* \to B^*$ называется *взаимно однозначным* (*декодируемым, разделимым*), если для любых слов $\overline{a}_1 \in A^*$ и $\overline{a}_2 \in A^*$ $\overline{a}_1 \neq \overline{a}_2 \Rightarrow \varphi(\overline{a}_1) \neq \varphi(\overline{a}_2)$.

Опр. Код называется *равномерным*, если длины всех его кодовых слов одинаковы.

Утверждение 1. Любой равномерный код является взаимно однозначным.

Определение 4. Код называется *префиксным*, если никакое кодовое слово не является началом другого.

Утверждение 2. Любое префиксное кодирование является взаимно однозначным.

Определение 5. Код называется *постфиксным* (*суффиксным*), если никакое кодовое слово не является концом другого.

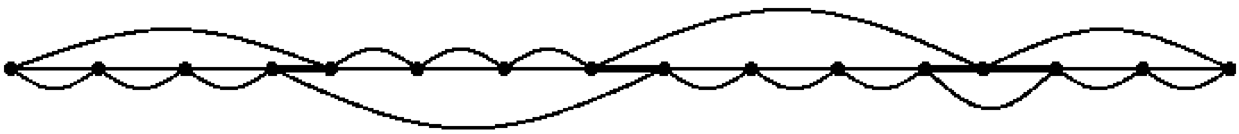
Утверждение 3. Любое постфиксное кодирование является взаимно однозначным.

Определение 6. Слово $\overline{b} \in B^*$ называется неприводимым, если b декодируется неоднозначно, однако, при выбрасывании из b любого связного непустого куска получается слово, которое декодируется не более, чем одним способом.

Теорема 1 [Марков А. А.]. Пусть $\varphi : a_i \to B_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) — некоторое кодирование. Пусть W — максимальное число кодовых слов, которые «помещаются» подряд внутри кодового слова. Пусть l_i — длина слова B_i и $L = \sum_{i=1}^{r} l_i$. Тогда если кодирование φ не взаимно однозначно, то существуют два различных слова $a' \in A^*a'$, $a'' \in A^*$,

$$\text{длина}(a') \leq \left[\frac{(W+1)(L-r+2)}{2}\right], \ \text{длина}(a'') \leq \left[\frac{(W+1)(L-r+2)}{2}\right] \text{ и } \varphi(a') = \varphi(a'')$$

Доказательство. Пусть φ не является взаимно однозначным. Тогда существует некоторое слово $\overline{b}_1$, которое допускает две расшифровки. Если слово $\overline{b}_1$ не является неприводимым, то выбрасывая из $\overline{b}_1$ куски несколько раз, получим неприводимое слово $\overline{b}$; иначе, положим $\overline{b} = \overline{b}_1$. Очевидно, это всегда можно сделать. Рассмотрим любые две декодировки слова $\overline{b}$. Разрежем слово $\overline{b}$ в концевых точках кодовых слов каждого из разбиений. Слова нового разбиения разделим на два класса: к I классу отнесём слова, являющиеся элементарными кодами, а ко II классу — все остальные слова (то есть слова, являющиеся началами кодовых слов одного разбиения и концами слов второго разбиения).



Лемма. Если $\overline{b}$ — неприводимое слово, то все слова $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ II класса различны.

Доказательство. Пусть $\beta' = \beta''$. Тогда, очевидно, слово b не будет неприводимым, поскольку при выкидывании отрезка между β' и β'', вместе с любым из этих слов, получим снова две различные расшифровки этого слова (проверьте).

Таким образом, все $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ разные. Тогда число слов второго класса не превосходит числа непустых начал элементарных кодов, то есть не превосходит

$$(l_1 - 1) + (l_2 - 1) + \ldots + (l_r - 1) = L - r.$$

Слова из второго класса разбивают слово не более чем на $L - r + 1$ кусков. Рассмотрим пары соседних кусков. Тогда согласно одному разбиению в одной половинке уложится не более одного кодового слова, а в другой — не более W (согласно второму разбиению ситуация симметрична). Всего пар кусков не больше, чем

$$\left[\frac{L-r+1}{2}\right] \le \frac{L-r+2}{2}$$

а в каждом из них укладывается слов не более чем $W + 1$. Отсюда число кодовых слов в любом разбиении не превосходит $\frac{L-r+2}{2}(W+1)$, а поскольку число целое, то не превосходит и целой части $\left[\frac{L-r+2}{2}(W+1)\right]$. Теорема доказана.

Собственно алгоритм определения однозначности некоторого кодирования φ, следующий из теоремы: кодируются все слова, длины не более $\left[\frac{L-r+2}{2}(W+1)\right]$. Если все коды получились уникальными, значит и для всех более длинных слов нарушений однозначности не будет.

№5 КПСТ для формул и СФЭ

Опр. Функциональная система: пара (Σ, f), где f - некоторая функция алгебры логики, Σ - способ реализации этой функции. Σ может быть контактной схемой (КС), схемой из функциональных элементов (СФЭ) или формулой в базисе $(\vee, \vee, \neg)$. Символом Σ_f будем обозначать схему, реализующую нек. функцию f.

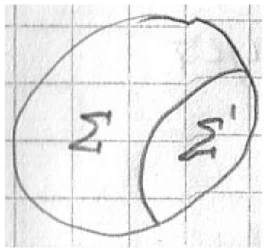
Опр. Будем говорить, что Σ_f эквивалентно $\Sigma'_{f'}$ ($\Sigma_f \sim \Sigma'_{f'}$), если $f = f'$.

Аналогично $V = (\Sigma, f) \sim V' = (\Sigma', f')$ если $f = f'$.

Опр. Тождество это пара (Σ, Σ'), $\Sigma \sim \Sigma'$. **Опр.** $\{\Sigma_i, \Sigma'_i\}_{i \geq 1}$ — система тождеств.

Опр. Σ' — подсхема схемы Σ, если Σ' это схема, и $\Sigma' \subseteq \Sigma$.

Опр. Подстановка это корректная замена подсхемы Σ' на подсхему Σ''. Подстановка является эквивалентной, если $\Sigma' \sim \Sigma''$.



Пусть от схемы Σ_1 с помощью эквивалентной подстановки переходим к схеме Σ_2 ($\Sigma_1 \to \Sigma_2$), от Σ_2 к Σ_3, и так далее до Σ_p. Тогда Σ_p получена из Σ_1 с помощью эквивалентных преобразований ($\Sigma_1 \Rightarrow \Sigma_p$). Очевидно, что в таком случае верно и $\Sigma_p \Rightarrow \Sigma_1$. В таком случае можно говорить, что $\Sigma_1 \sim \Sigma_p$ относительно системы тождеств Т (эти тождества использовались при эквивалентных подстановках) ($\Sigma_1 \underset{T}{\sim} \Sigma_p$).

Опр. Система тождеств Т полна в рассматриваемом классе функциональных систем К, если $\forall \quad \Sigma \sim \Sigma', \ \Sigma, \Sigma' \in K \qquad \Rightarrow \qquad \Sigma \underset{T}{\sim} \Sigma'$.

Для каждого класса функциональных систем важен вопрос, существует ли для него полная система тождеств, и является ли она конечной — задача поиска КПСТ (конечной полной системы тождеств).

Теорема. Для класса формул в базисе $Б_0 = \{\vee, \&, \neg\}$ существует конечная полная система тождеств.

□

Объявим каноническим видом след. представление: 1) $f \equiv 0 \Rightarrow x_1 \& \bar{x}_1$

2) $f \neq 0 \Rightarrow$ совершенная ДНФ для f.

Доказательство теоремы заключается в том, что с помощью приведенной ниже КПСТ любую формулу можно привести к каноническому виду, который будет одинаковым для всех формул, реализующих одну функцию (свойство совершенной ДНФ).

1) Опускание отрицаний
$$\begin{cases} \overline{x_1 \& x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} & (1) \\ \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \& \overline{x_2} & (2) \\ \overline{\overline{x}} = x & (3) \end{cases}$$

2) Приведение к виду $\& \vee$ — дизъюнкция коньюнкций:
$$(x_1 \vee x_2) \& x_3 = (x_1 \& x_3) \vee (x_2 \& x_3) \quad (4)$$
$$x_2 \& x_1 = x_1 \& x_2 \quad (5)$$

3) Группировка множителей, (5) и (6) позволяют собрать рядом xx и $x\bar{x}$:
$$(x_1 \& x_2) \& x_3 = x_1 \& (x_2 \& x_3) \quad (6)$$

4) Исключение кратных вхождений: $x \& x = x$ (7)

5) Исключение вхождений $x\bar{x}$:

$$(\bar{x}_1 \,\&\, x_1)\&x_2 = (\bar{x}_1 \,\&\, x_1) \qquad (8)$$
$$(\bar{x}_1 \,\&\, x_1)\vee x_2 = x_2 \qquad (9)$$
$$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1 \qquad (10)$$

6) Введение однородности (в сов. ДНФ все слагаемые одного ранга):
$$x_1 = x_1 \,\&\, (x_2 \vee \bar{x}_2) \qquad (11)$$

7) Группировка слагаемых:
$$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3 \qquad (12)$$

8) Уничтожение одинаковых слагаемых:
$$x_1 \vee x_1 = x_1 \qquad (13)$$

□

Рассмотрим СФЭ в базисе $Б_0 = \{\vee, \&, \neg\}$

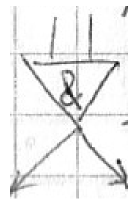
Опр. Для схем из функциональных элементов в определении эквивалентности нужно уточнить, что схемы Σ и Σ' эквивалентны, если у них одинаковые наборы входов, выходов, и все реализованные функции также одинаковы.

$\Sigma \sim \Sigma' \Leftrightarrow f_{Z_i,\Sigma} = f_{Z'_i,\Sigma'}$

Опр. Σ' — подсхема схемы Σ, если
1) $\Sigma' \subseteq \Sigma$. 2)Если V – полюс схемы Σ (полюс – вход или выход), $V \in \Sigma'$, то V- полюс и в Σ'. 3)Все вершины из Σ', соединяющиеся с вершинами, не входящими в Σ' — полюса.

<u>Тождество</u> — пара эквивалентных схем. Определение полной системы тождеств для СФЭ аналогично общему определений ПСТ (приведено выше).

Теорема. В классе СФЭ существует КПСТ.



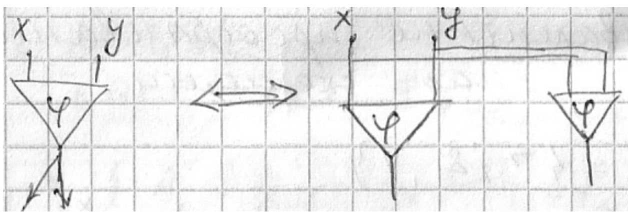
Ветвление на функц. элементе

□

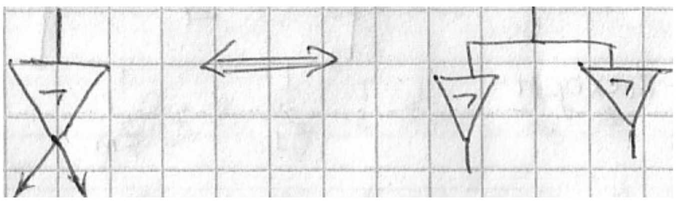
В базисе $Б_0 = \{\vee, \&, \neg\}$ каждой СФЭ без разветвлений на функциональных элементах соответствует формула.

Введем тождества, чтобы избавится от разветвлений на функциональных элементах.

1) $\varphi = \{\&, \vee\}$

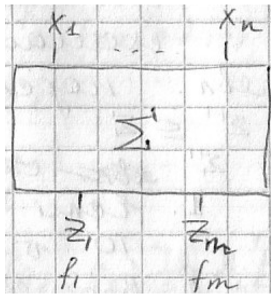


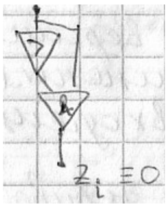
2)



Применяя их к СФЭ сверху вниз можно полностью исключить ветвление на функц. элементах.

Введем канонический вид для СФЭ. Без ветвления СФЭ, реализующая несколько функций (имеющая несколько выходов) является объединением независимых СФЭ, реализующих отдельные функции, соединенные только на входах.



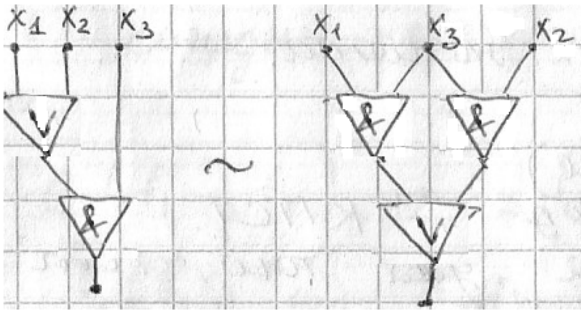
1) Если $f_i \equiv 0$, то 

2) Если $f_i \neq 0$, то используется СФЭ, построенная по совершенной ДНФ.

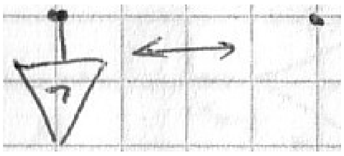
Таким образом канонический вид схемы Σ образуется объединением канонических схем для функций $f_i, i = \overline{1.m}$.

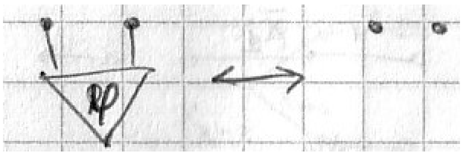
<u>Тождества</u>: в качестве тождеств возьмем СФЭ представления тождеств из предыдущей теоремы, например:

$$\left(x_1 \vee x_2\right) \& \, x_3 = \left(x_1 \,\&\, x_3\right) \vee \left(x_2 \,\&\, x_3\right) \longrightarrow$$

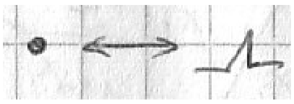


Так из 14-ти тождеств предыдущей теоремы строим 14 тождеств для СФЭ + добавляем тождества, исключающие неиспользуемые функциональные элементы:





где $\varphi = \{\&, \vee\}$

Также добавим тождество, сводящее схемы из одной неиспользуемой переменной к пустой схеме: 

Таким образом доказательство теоремы свелось к доказательству предыдущей теоремы: описанный конечный набор тождеств позволяет преобразовать любую СФЭ к каноническому виду, который будет одинаков для всех СФЭ, реализующих одинаковый набор функций.

□

Вопрос 6. Сокращенные, тупиковые, минимальные дизъюнктивные нормальные формы (д.н.ф.), алгоритмы их построения. Оценки сложности д.н.ф.

Определение. Функции x_i и $\overline{x_i}$ будем называть буквами булевых переменных (БП) x_i.

Определение. Конъюнкция (дизъюнкция) $r,\ 1 \leqslant r \leqslant n$, букв различных БП из множества $X(n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ называется элементарной конъюнкцией (ЭК) (соответственно элементарной дизъюнкцией (ЭД)) ранга r от булевых переменных $X(n)$.

Определение. Дизъюнкция различных элементарных конъюнкций называется дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ), а конъюнкция различных элементарных дизъюнкций – конъюнктивной нормальной формой (КНФ).

Определение. ДНФ (КНФ) считается совершенной, если все ее ЭК (соответственно ЭД) существенно зависят от одних и тех же БП, а их ранг равен числу этих БП.

Определение. Число ЭК (ЭД) в ДНФ (соответственно КНФ) $\mathfrak{A}$ называется ее длиной и обозначается через $\lambda(\mathfrak{A})$.

Любую ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$, отличную от константы можно представить в виде ее совершенных ДНФ и КНФ следующим образом:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N_f} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} = \bigwedge_{(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \overline{N}_f} \left(x_1^{\overline{\beta}_1} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\beta}_n} \right)$$

Представление ФАЛ в виде ДНФ или КНФ имеет простую геометрическую интерпретацию. Пусть

$$f(x_1, \ldots, x_n) = K_1 \vee \ldots \vee K_s = \mathfrak{A}, \tag{1}$$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = J_1 \ldots J_t = \mathfrak{B}, \tag{2}$$

где $K_1, \ldots, K_s$ $(J_1, \ldots, J_t)$ – различные ЭК (соответственно ЭД) от БП $x_1, \ldots, x_n$. Тогда представления (1) и (2) эквивалентны следующим покрытиям множеств N_f и $\overline{N}_f$ гранями куба B^n

$$N_f = N_{K_1} \cup \ldots \cup N_{K_s} \tag{3}$$

$$\overline{N}_f = \overline{N}_{J_1} \cup \ldots \cup \overline{N}_{J_t} \tag{4}$$

Определение. Будем говорить, что ФАЛ f' имплицирует ФАЛ f'' или, иначе, ФАЛ f'' поглощает ФАЛ f', если $N_{f'} \subseteq N_{f''}$, то есть импликация ($f' \to f''$) тождественно равна 1.

Определение. ЭК, которая имплицирует ФАЛ f, называется импликантой этой ФАЛ.

Определение. ДНФ $\mathfrak{A}$ вида (1) будем называть неприводимой, если соответствующее ей покрытие является неприводимым, то есть ни одна из граней $N_{K_1}, \ldots, N_{K_s}$ не содержится ни в одной из других граней покрытия. На языке "имплицируемости"это означает, что ни одна из ЭК $K_i,\ i \in [1, n]$ не является импликантой ЭК $K_j,\ j \in [1, n],\ i \neq j$.

Определение. Импликанта K ФАЛ f называется простой импликантой этой ФАЛ, если она не поглощается никакой другой отличной от нее импликантой ФАЛ f.

Определение. Дизъюнкция всех простых импликант ФАЛ f называется ее сокращенной ДНФ.

Сокращенная ДНФ ФАЛ f является неприводимой ДНФ, и что ей соответствует покрытие множества N_f всеми максимальными по включению гранями множества N_f этой ФАЛ, которые называются максимальными гранями ФАЛ f.

Теорема 1.
Пусть $\mathfrak{A}'$ *и* $\mathfrak{A}''$ *– сокращенные ДНФ ФАЛ* f' *и* f'' *соответственно, а неприводимая ДНФ* $\mathfrak{A}$ *получается из формулы* $\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{A}''$ *в результате раскрытия скобок и приведения подобных. Тогда* $\mathfrak{A}$ *– сокращенная ДНФ ФАЛ* $f = f' \cdot f''$ *.*

Следствие.
Если неприводимая ДНФ $\mathfrak{A}$ *получается из КНФ* $\mathfrak{B}$ *ФАЛ* f *в результате раскрытия скобок и приведения подобных, то* $\mathfrak{A}$ *– сокращенная ДНФ ФАЛ* f *.*

Алгоритм 1 (метод Блейка)**.**
Данный метод позволяет получать сокращенную ДНФ ФАЛ f *из произвольной ДНФ этой ФАЛ с помощью эквивалентных преобразований на основе тождеств* $\{\tau^{nn}, \tau^{oc}\}$ *. Любая ДНФ* $\mathfrak{A}'$ *, которую можно получить из ДНФ* $\mathfrak{A}$ *путем формирования в ней с помощью тождеств* $\{\tau_A, \tau_K\}$ *подформул вида* $x_i K' \vee \overline{x}_i K''$ *, проведения ЭП*

$$x_i K' \vee \overline{x}_i K'' \xrightarrow[\tau^{oc}]{x} {}_i\, K' \vee \overline{x}_i K'' \vee K' K''$$

и последующего приведения подобных, называется расширением ДНФ $\mathfrak{A}$ *.*

Замечание. Системы тождеств:

- тождество ассоциативности

$$t^A_\circ \,:\, x_1 \circ (x_2 \circ x_3) = (x_1 \circ x_2) \circ x_3$$

- тождество коммутативности

$$t^K_\circ \,:\, x_1 \circ x_2 = x_2 \circ x_1$$

- тождество отождествления БП

$$t^{on}_\circ \,:\, x \circ x = x,$$

  где $\circ \in \{\&, \vee\}$

- тождество дистрибутивности "$\circ$"относительно "$\diamond$"

$$t^D_{\circ,\diamond} \,:\, x_1 \circ (x_2 \diamond x_3) = (x_1 \circ x_2) \diamond (x_1 \circ x_3)$$

- тождества де Моргана

$$t^M_\neg \,:\, \overline{(\overline{x}_1)} = x_1,\ t^M_\circ \,:\, \overline{(x_1 \circ x_2)} = (\overline{x}_1) \diamond (\overline{x}_2),$$

  где $(\circ, \diamond) \in \{(\&, \vee), (\vee, \&)\}$

- тождества подстановки констант

$$t^{nk}_{0,\&} \,:\, x_1(x_2 \cdot \overline{x}_2) = x_2 \cdot \overline{x}_2,\ t^{nk}_{1,\&} \,:\, x_1(x_2 \vee \overline{x}_2) = x_1,$$

$$t^{nk}_{0,\vee} \,:\, x_1 \vee x_2 \cdot \overline{x}_2 = x_1,\ t^{nk}_{1,\vee} \,:\, x_1 \vee (x_2 \vee \overline{x}_2) = x_2 \vee \overline{x}_2$$

- тождество поглощения

$$t^n \,:\, x_1 \vee x_1 x_2 = x_1$$

- тождество обобщенного склеивания

$$t^{oc} : x_1x_2 \vee \overline{x}_1x_3 = x_1x_2 \vee \overline{x}_1x_3 \vee x_1x_3$$

Положим

$$\begin{aligned}
&\tau^{\text{осн}} = \left\{\tau^M_{\&}, \tau^M_{\neg}, \tau^A_{\&}, \tau^K_{\&}, \tau^{on}_{\&}, \tau^D_{\&,\vee}, \tau^{nk}_{1,\&}, \tau^{nk}_{0,\&}, \right\},\\
&\tau^A = \left\{\tau^A_{\&}, \tau^A_{\vee}\right\},\\
&\tau^K = \left\{\tau^K_{\&}, \tau^K_{\vee}\right\},\\
&\tau^{on} = \left\{\tau^{on}_{\&}, \tau^{on}_{\vee}\right\},\\
&\tau^D = \left\{\tau^D_{\&,\vee}, \tau^D_{\vee,\&}\right\},\\
&\tau^{nk} = \left\{\tau^{nk}_{0,\&}, \tau^{nk}_{1,\&}, \tau^{nk}_{0,\vee}, \tau^{nk}_{1,\vee}\right\},\\
&\tilde{\tau}^{\text{осн}} = \left\{\tau^M, \tau^A, \tau^K, \tau^{on}, \tau^D, \tau^{nk}, \tau^n\right\},\\
&\tau^{nn} = \left\{\tau_A, \tau_K, \tau^{nk}, \tau^{on}, \tau^n\right\}.
\end{aligned}$$

Определение. Расширение $\mathfrak{A}'$ ДНФ $\mathfrak{A}$ считается строгим, если $\mathfrak{A}'$ содержит ЭК, не являющуюся импликантой ни одной ЭК из $\mathfrak{A}$.

Теорема 2.
Неприводимая ДНФ является сокращенной ДНФ тогда и только тогда, когда она не имеет строгих расширений.

Следствие.
Из любой ДНФ $\mathfrak{A}$ ФАЛ f можно получить сокращенную ДНФ этой ФАЛ в результате построения последовательных строгих расширений и приведения подобных до получения неприводимой ДНФ, не имеющей строгих расширений.

Для $I \subseteq [0,n]$ через $s^I_n(x_1,\ldots,x_n)$ обозначим ФАЛ из $P_2(n)$, которая является характеристической ФАЛ объединения всех слоев куба B^n с номерами из I. При этом числа из I считаются рабочими числами ФАЛ s^I_n. Заметим, что ФАЛ s^I_n является симметрической, то есть не изменяет свое значение при любой перестановке аргументов, и наоборот, любая симметрическая функция алгебры логики совпадает с одной из ФАЛ вида s^I_n. Заметим также, что отличная от константы симметрическая ФАЛ является существенной ФАЛ.

Симметрическая ФАЛ называется *поясковой*, если ее рабочие числа образуют отрезок. Сокращенная ДНФ поясковой ФАЛ $s^{[r,p]}_n$, где $0 \leqslant r \leqslant p \leqslant n$, состоит из всех ЭК ранга $(n+r-p)$, которые содержат r БП и $(n-p)$ отрицаний БП, то есть имеет вид

$$s^{[r,p]}_n(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{\substack{1\leqslant i_1<\ldots<i_{n+r-p}\leqslant n\\ \sigma_1+\ldots+\sigma_{n+r-p}=r}} x^{\sigma_1}_{i_1}\ldots x^{\sigma_{n+r-p}}_{i_{n+r-p}}. \quad (5)$$

Из (5) следует, что длина сокращенной ДНФ ФАЛ $s^{[r,p]}_n$ равна $\binom{n}{r}\cdot\binom{n-p}{n-r}$, и поэтому при $r = n-p = \left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil$ она в соответствии с формулой Стирлинга не меньше, чем $e_1\frac{3^n}{n}$, где e_1 – некоторая константа.

С другой стороны, сокращенная ДНФ любой ФАЛ из $P_2(n)$ является неприводимой ДНФ, и поэтому соответствует антицепи в частично упорядоченном множестве из всех граней куба B^n с отношением вложения. Заметим, что это частично упорядоченное множество является ранжированным частично упорядоченным множеством длины $(n+1)$, где i-ый ярус, $i=0,\ldots,n$, состоит из всех граней размерности i, число которых равно $\binom{n}{i}2^{n-i}$. Заметим также, что через любую грань куба B^n размерности i, $i=0,\ldots,n$, проходит $(n-i)!i!2^i$ неуплотняемых цепей указанного частично упорядоченного множества. Оценивая максимальное значение величины $\binom{n}{i}2^{n-i}$ на отрезке $i\in[0,n]$, можно показать, что оно достигается при $i=\left\lceil\frac{n-2}{3}\right\rceil$. В соответствии с формулой Стирлинга отсюда следует, что мощность любой антицепи рассматриваемого частично упорядоченного множества, а значит и длина сокращенной ДНФ любой ФАЛ f из $P_2(n)$, не больше, чем $e_2\frac{3^n}{\sqrt{n}}$, где e_2 – некоторая константа.

Определение. ДНФ $\mathfrak{A}$, реализующая ФАЛ f, является тупиковой ДНФ, если $f \neq \mathfrak{A}'$ для любой ДНФ $\mathfrak{A}'$, полученной из $\mathfrak{A}$ в результате удаления некоторых букв или целых ЭК.

Из определения следует, что в тупиковую ДНФ $\mathfrak{A}$ ФАЛ f могут входить только простые импликанты этой ФАЛ, то есть $\mathfrak{A}$ получается из сокращенной ДНФ ФАЛ f путем удаления некоторых ЭК, и что $\mathfrak{A}$ является неприводимой ДНФ. С "геометрической"точки зрения тупиковая ДНФ $\mathfrak{A}$ ФАЛ f задает тупиковое покрытие множества N_f максимальными гранями ФАЛ f и обратно. Исходя из этих "геометрических"соображений, можно находить все или некоторые тупиковые ДНФ для ФАЛ от небольшого числа БП.

Определение. Минимальной (кратчайшей) ДНФ ФАЛ f называется ДНФ, имеющая минимальный ранг (соответственно длину) среди всех ДНФ, реализующих f.

Определение. Набор $\alpha, \alpha \in B_n$, называется ядровой точкой ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$, если $\alpha \in N_f$ и α входит только в одну максимальную грань ФАЛ f. При этом грань N_K, являющаяся максимальной гранью ФАЛ f и содержащая точку α, считается ядровой гранью ФАЛ f, а совокупность всех различных ядровых граней ФАЛ f называется ядром ФАЛ f.

Определение. Будем называть ФАЛ ядровой, если все ее максимальные грани являются ядровыми.

Определение. ДНФ, получающаяся из сокращенной ДНФ ФАЛ f удалением тех ЭК K, для которых грань N_K покрывается ядром ФАЛ f, но не входит в него, называется ДНФ Квайна этой ФАЛ.

Определение. Для ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ и набора $\alpha, \alpha \in N_f$, обозначим через $\Pi_\alpha(f)$ множество всех проходящих через α максимальных граней ФАЛ f, которое мы будем называть пучком ФАЛ f через точку α. Точка α называется регулярной относительно грани N_K точкой ФАЛ f, где $\alpha \in N_f,\ N_K \in \Pi_\alpha(f)$, если найдется точка $\beta, \beta \in N_f \backslash N_K$, для которой $\Pi_\beta(f) \subseteq \Pi_\alpha(f)$.

Определение. Грань N_K ФАЛ f называется регулярной гранью этой ФАЛ, если все точки N_K регулярны относительно нее самой.

Алгоритм 2 (Построение тупиковых ДНФ)**.**
С "геометрической"точки зрения, сокращенная ДНФ ФАЛ f из $P_2(n)$ представляет собой покрытие множества N_f всеми максимальными гранями, а тупиковая ДНФ соответствует тупиковому подпокрытию, выделяемому из этого покрытия.

Пусть $\mathcal{N} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ – конечное множество, а $\mathfrak{N} = (\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_p)$ – система его подмножеств, образующих покрытие множества $\mathcal{N}$. Сопоставим паре $(\mathcal{N}, \mathfrak{N})$ матрицу $M, M \in B^{p,s}$, для которой $M\langle i, j\rangle = 1$ тогда и только тогда, когда $\alpha_j \in \mathcal{N}_i$. Матрица M не имеет нулевых столбцов, так как система $\mathcal{N}$ образует покрытие множества $\mathcal{N}$. Будем считать, что i-я строка (j-й столбец) матрицы M соответствует подмножеству $\mathcal{N}_i$ системы $\mathfrak{N}$ (элементу α_j множества $\mathcal{N}$) и не будем делать между ними существенных различий. Так, будем говорить, что i-я строка матрицы M покрывает ее j-й столбец, если $M\langle i, j\rangle = 1$, и что система строк с номерами из $I, I \subseteq [1, p]$, образует покрытие матрицы M, если каждый ее столбец покрывается хотя бы одной строкой с номером из I, то есть система $\{\mathcal{N}_i\}_{i \in I}$ задает покрытие множества $\mathcal{N}$. Аналогичным образом понимается покрытие одного множества строк матрицы M другим множеством ее строк и т.п. Покрытие матрицы M, в котором ни одна строка не покрывается другой строкой, считается неприводимым, а покрытие, не имеющее собственных подпокрытий, называется *тупиковым. Задача выделения всех тупиковых подпокрытий из покрытия* $\mathfrak{N}$ *множества* $\mathcal{N}$ *эквивалентна задаче построения всех тупиковых покрытий матрицы* M, *соответствующей паре* $(\mathcal{N}, \mathfrak{N})$.

Пусть $M, M \in B^{p,s}$ *– матрица без нулевых столбцов. Сопоставим* i *-й строке,* $i \in [1,p]$ *матрицы* M *БП* y_i, *а каждому набору* $\beta, \beta \in B^p$, *значений этих переменных* $y = (y_1, \ldots, y_p)$, *– множество строк матрицы* M *с номерами из множества* $I = I(\beta) \subseteq [1,p]$, *где* $i \in I(\beta)$ *тогда и только тогда, когда* $\beta\langle i\rangle = 1$. *Рассмотрим ФАЛ* $F(y)$, *для которой* $F(\beta) = 1$ *тогда и только тогда, когда система строк матрицы* M *с номерами из* $I(\beta)$ *образует ее покрытие, и будем называть эту ФАЛ функцией покрытия матрицы* M. *Заметим, что ФАЛ покрытия* $F(y)$ *является монотонной ФАЛ, а ее "нижние единицы"соответствуют тупиковым покрытиям матрицы* M. *Действительно, из неравенства* $\beta' \leqslant \beta''$ *вытекает, что* $I(\beta') \subseteq I(\beta'')$ *и поэтому* $F(\beta') \leqslant F(\beta'')$, *то есть ФАЛ* F *является монотонной. Из определений следует также, что набор* $\beta, \beta \in B^p$, *являющийся "нижней единицей"ФАЛ* F, *соответствует множеству* $I(\beta)$, *которое задает тупиковое покрытие матрицы* M, *и обратно. Таким образом, каждая простая импликанта вида* $K = y_{i_1} \ldots y_{i_r}$, *где* $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant p$, *ФАЛ покрытия* $F(y)$ *соответствует тупиковому покрытию матрицы* M, *состоящему из строк с номерами из множества* $I = \{i_1, \ldots i_r\}$, *и обратно.*

Лемма 1.
Функция покрытия $F(y_1, \ldots, y_p)$ *матрицы* $M, M \in B^{p,s}$, *без нулевых столбцов, задается КНФ вида:*

$$F(y_1, \ldots, y_p) = \bigwedge_{j=1}^{s} \left(\bigvee_{1 \leqslant i \leqslant p,\ M\langle i,j\rangle = 1} y_i \right). \tag{6}$$

Следствие.
В результате раскрытия скобок и приведения подобных из КНФ (6) можно получить сокращенную ДНФ ФАЛ $F(y)$, *простые импликанты которой взаимно однозначно соответствуют тупиковым покрытиям матрицы* M.

Задача построения всех тупиковых ДНФ ФАЛ f *из* $P_2(n)$ *на основе ее сокращенной ДНФ сводится к рассмотренной задаче о покрытии, если в качестве множества* $\mathcal{N}$ *взять множество* N_f, *а в качестве его покрытия* $\mathfrak{N}$ *– систему всех максимальных граней ФАЛ* f. *Матрица* M, *соответствующая указанной паре* $(\mathcal{N}, \mathfrak{N})$, *называется таблицей Квайна ФАЛ* f.

Алгоритм 3 (Построение тупиковых ДНФ (модификация))**.**
В общем случае при построении всех тупиковых ДНФ ФАЛ $f, f \in P_2(n)$, *с помощью леммы 1 на основе ее сокращенной ДНФ используют, обычно, следующую модификацию рассмотренного выше подхода, которая позволяет уменьшить размеры матрицы* M. *Пусть* $N_{K_1}, \ldots, N_{K_q}$ *– все максимальные грани ФАЛ* f, *причем грани* $N_{K_{p+1}}, \ldots, N_{K_t}$, *где* $1 \leqslant p \leqslant t \leqslant q$, *являются ядровыми, а грани* $N_{K_{t+1}}, \ldots, N_{K_q}$ *– регулярными гранями ФАЛ* f. *Положим*

$$\hat{\mathcal{N}} = \bigcup_{i=p+1}^{t} N_{K_t},\ \mathcal{N} = N_f \backslash \hat{\mathcal{N}} \text{ и } \mathfrak{N} = \{\mathcal{N}_1, \ldots, \mathcal{N}_p\},$$

где $\mathcal{N}_i = N_{K_i} \backslash \hat{\mathcal{N}}$ *при всех* $i, i \in [1,p]$. *При этом задача построения всех тупиковых ДНФ ФАЛ* f *эквивалентна задаче выделения всех тупиковых подпокрытий из покрытия* $\mathfrak{N}$ *множества* $\mathcal{N}$. *Действительно, если система подмножеств* $\mathcal{N}_{i_1}, \ldots, \mathcal{N}_{i_r}$, *где* $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant p$ *, является тупиковым покрытием множества* $\mathcal{N}$ *, то система максимальных граней* $\mathcal{N}_{K_{i_1}}, \ldots, \mathcal{N}_{K_{i_r}}, \mathcal{N}_{K_{p+1}}, \ldots, \mathcal{N}_{K_t}$ *задает тупиковое покрытие множества* N_f *, т.е. соответствует тупиковой ДНФ ФАЛ* f *, и обратно.*

Различные параметры ДНФ (ранг, длина и т.п.) характеризуют различные "меры"сложности указанного представления или структурной реализации. В связи с этим часто возникает необходимость построения оптимальной в том или ином смысле ДНФ для заданной ФАЛ, то есть необходимость решения задачи минимизации ДНФ, которая является частным случаем задачи синтеза управляющих систем.

В общем виде задача минимизации ДНФ может быть сформулирована следующим образом. Пусть для каждой ДНФ $\mathfrak{A}$ определена ее "сложность" $\psi(\mathfrak{A}), \psi(\mathfrak{A}) \geqslant 0$, для которой $\psi(\mathfrak{A}') \geqslant \psi(\mathfrak{A}'')$, если ДНФ $\mathfrak{A}''$ получается из ДНФ $\mathfrak{A}'$ удалением букв или ЭК. В этом случае будем говорить, что на множестве ДНФ задан неотрицательный функционал сложности ψ , обладающий свойством монотонности.

Задача минимизации ДНФ относительно функционала сложности ψ состоит в том, чтобы по заданной ФАЛ f построить реализующую ее ДНФ $\mathfrak{A}$ такую, что $\psi(\mathfrak{A}) = min \psi(\mathfrak{A}')$, где минимум берется по всем ДНФ $\mathfrak{A}'$, реализующим ФАЛ f . При этом ДНФ $\mathfrak{A}$ считается минимальной относительно функционала ψ или, иначе, ψ-минимальной ДНФ, а значение $\psi(\mathfrak{A})$ называется сложностью ФАЛ f относительно функционала ψ или, иначе, ψ-сложностью ФАЛ f в классе ДНФ.

Из монотонности функционала ψ для сложности ДНФ следует, что ψ-минимальную ДНФ всегда можно выбрать среди тупиковых ДНФ.

Поскольку длина любой тупиковой ДНФ у любой ФАЛ из $P_2(n)$ не больше, чем 2^n , а число различных граней куба B^n равно 3^n , то, следовательно, число тупиковых ДНФ у любой ФАЛ из $P_2(n)$ не больше, чем

$$2^n \binom{3^n}{2^n} \leqslant 2^n \cdot \frac{3^{n \cdot 2^n}}{(2^n)!} \leqslant 3^{n \cdot 2^n}.$$

Данную оценку можно уточнить следующим образом. Установим между множеством всех ДНФ от БП $X(n)$ и кубом B^{3^n} изоморфизм, отображающий ДНФ $\mathfrak{A}$ в набор β , для которого $\beta\langle i \rangle = 1$ тогда и только тогда, когда грань куба B^n с номером $i, i \in [1, 3^n]$, входит в покрытие, связанное с $\mathfrak{A}$. При этом любая тупиковая ДНФ соответствует набору с не более, чем 2^n единицами, а две различные тупиковые ДНФ одной и той же ФАЛ – попарно не сравнимым наборам. Следовательно, число тупиковых ДНФ у одной и той же ФАЛ из $P_2(n)$ не больше ширины частично упорядоченного множества $(A, \leqslant)$, где множество A состоит из всех слоев куба B^{3^n} с номерами $0, 1, \ldots, 2^n$, которая, в свою очередь, не больше, чем $\binom{3^n}{2^n}$.

Теорема 3.
Для любого $n, n \in \mathbb{N}$ *, и для почти всех ФАЛ* $f, f \in P_2(n)$ *, имеют место соотношения:*

$$\lambda(n) = 2^{n-1}, \quad R(n) = n \cdot 2^{n-1},$$
$$\lambda(f) \lesssim \tfrac{3}{4} 2^{n-1}, \quad R(f) \lesssim \tfrac{3}{4} n \cdot 2^{n-1}$$

Литература

1. С.А. Ложкин "Лекции по основам кибернетики"(учебное пособие по курсам "Основы кибернетики"и "Структурная реализация дискретных функций"). – М.: Издательский отдел ф-та ВМК МГУ, 2004.

Вопрос №7.
Метод Лупанова для синтеза схем из функциональных элементов.

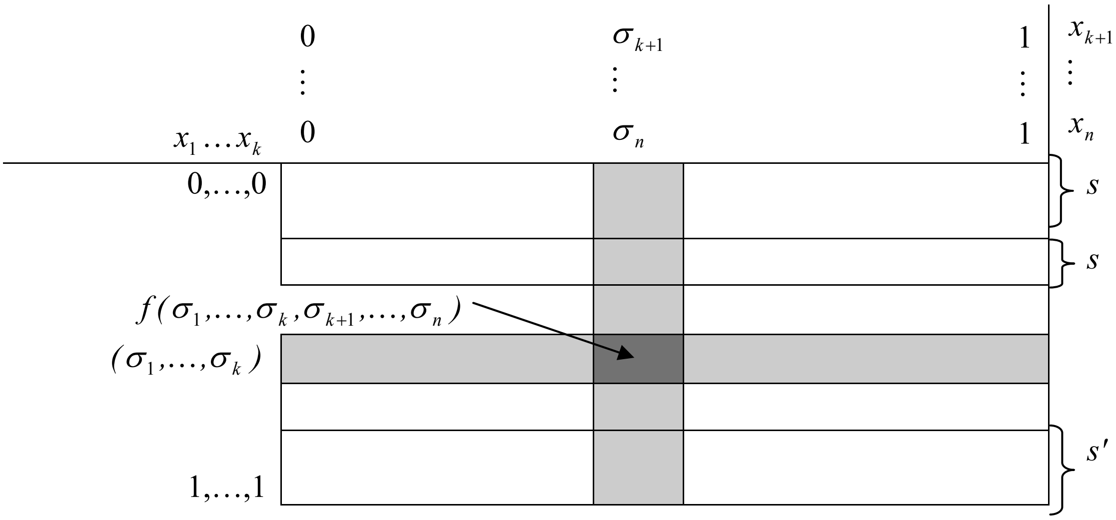
Первым асимптотически наилучшим методом синтеза для реализации всех булевых функций был метод Лупанова, который был сначала сформулирован для контактных схем и затем им же был распространен на схемы из Ф.Э.

Теорема (О.Б. Лупанов). Для схем из Ф.Э. в базисе, состоящем из инвертора, дизъюнктора и конъюнктора, можно построить асимптотически наилучший метод синтеза и

$$L(n) \sim \frac{2^n}{n}$$

Доказательство. Зададим произвольную булеву функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$ при помощи таблицы размера $2^k \times 2^{n-k}$ (см. таблицу 1).

Таблица 1



Строки этой таблицы нумеруем наборами значений по переменным $x_1,\ldots,x_k$, столбцы – по переменным $x_{k+1},\ldots,x_n$. На пересечении строки $(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)$ и столбца $(\sigma_{k+1},\ldots,\sigma_n)$ помещаем значение $f(\sigma_1,\ldots,\sigma_k,\sigma_{k+1},\ldots,\sigma_n)$.

Легко видеть, что столбец с номером $(\sigma_{k+1},\ldots,\sigma_n)$ задает функцию $f(x_1,\ldots,x_k,\sigma_{k+1},\ldots,\sigma_n)$, являющуюся компонентой разложения

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{(\sigma_{k+1},\ldots,\sigma_n)} x_{k+1}^{\sigma_{k+1}} \ldots x_n^{\sigma_n} f(x_1,\ldots,x_k,\sigma_{k+1},\ldots,\sigma_n) \qquad (*)$$

Возьмем целое число s, $1 < s < 2^k$, и разрежем таблицу на полосы шириной s (см. таблицу 1). При этом последняя полоса может оказаться меньшей ширины s' $(s' \le s)$. Занумеруем сверху вниз полученные полосы числами $1,2,\ldots,p$, где $p = \left]\frac{2^k}{s}\right[$, и рассмотрим полосу с номером i (см. таблицу 2) и строками $(\sigma_1(1)\ldots\sigma_{\text{л}}(1)),\ldots,(\sigma_1(s)\ldots\sigma_{\text{л}}(s))$.

Таблица 2

		j	
$\sigma_1(1)\ldots\sigma_k(1)$		γ_1	
		$\vdots$	
$\sigma_1(s)\ldots\sigma_k(s)$		γ_s	

Эта полоса распадается на короткие столбцы высоты *s,* для последней полосы – высоты *s'*. Поэтому число *t(i)* сортов коротких столбцов будет не более 2^s. Произведем нумерацию этих сортов числами *1,2,...,t(i)*.

Пусть $(\gamma_1,\ldots,\gamma_s)$ - столбец *j*-го сорта. Обозначим через $f_{ij}(x_1,\ldots,x_k)$ булеву функцию, определяемую этим коротким столбцом:

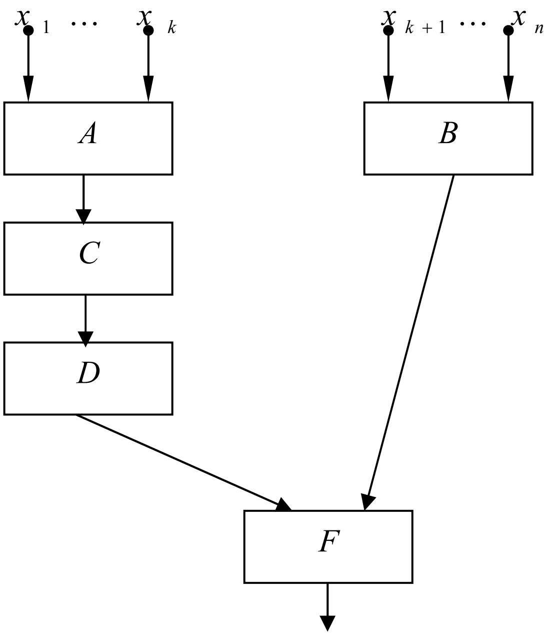
$$f_{ij}(x_1,\ldots,x_k)=\begin{cases}\gamma_l, если\_(\sigma_1,\ldots,\sigma_k)=(\sigma_1(l),\ldots,\sigma_k(l)), l=1,\ldots,s,\\ 0, если\_(\sigma_1,\ldots,\sigma_k) не\_принадлежит\_i-ой\_полосе.\end{cases}$$

Столбец с номером $(\sigma_{k+1},\ldots,\sigma_n)$ разрезается полосами на *p* коротких столбцов. Поэтому

$$f(x_1,\ldots,x_k,\sigma_{k+1},\ldots,\sigma_n)=f_{1j_1}(x_1,\ldots,x_k)\vee\ldots\vee f_{pj_p}(x_1,\ldots,x_k), \qquad (**)$$

где j_i - номер сорта соответствующего короткого столбца, принадлежащего *i*-ой полосе.

Теперь перейдем к описанию схемы Σ. Ее мы получим в виде соединения отдельных блоков (см. рисунок). Попутно будем оценивать сложность блоков.



1. Блок *A* реализует все конъюнкции $x_1^{\sigma_1},\ldots,x_k^{\sigma_k}$, $L(A)\le k2^k$.
2. Блок *B* реализует все конъюнкции $x_{k+1}^{\sigma_{k+1}},\ldots,x_n^{\sigma_n}$, $L(B)\le(n-k)2^{(n-k)}$
3. Блок *C* реализует по совершенной д.н.ф. функции $f_{ij}(x_1,\ldots,x_k)$,
   $L(C)\le(s-1)(t(1)+\ldots+t(p))<sp2^s$.
4. Блок *D* реализует функции $f(x_1,\ldots,x_k,\sigma_{k+1},\ldots,\sigma_n)$ на основе формулы (**),
   $L(D)\le(p-1)2^{n-k}<p2^{n-k}$.

5. Блок F реализует функцию $f(x_1,\dots,x_n)$ исходя из ее разложения (*),
$L(F)\le 2^{n-k}+2^{n-k}-1<2\cdot 2^{n-k}$.

Суммируя полученные оценки, имеем $L(\Sigma)\le k2^k+(n-k)2^{n-k}+sp2^s+p2^{n-k}+2\cdot 2^{n-k}$.

Положим $k=[3\log_2 n], s=[n-5\log_2 n]$. Тогда $p=\left]\frac{2^k}{s}\right[\sim\frac{2^k}{s}$ и

$L(\Sigma)\le k2^k+n2^{n-k}+2^{k+s}+\frac{2^n}{s}$, причем

$$k2^k=o\left(\frac{2^n}{n}\right),$$

$$n2^{n-k}=o\left(\frac{2^n}{n}\right),$$

$$2^{k+s}=o\left(\frac{2^n}{n}\right),$$

$$\frac{2^n}{s}\sim\frac{2^n}{n}$$

Поэтому

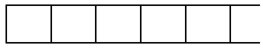
$$L(\Sigma)\le\frac{2^n}{n}.$$

В силу произвольности функции $f(x_1,\dots,x_n)$ отсюда следует, что

$$L(n)\le\frac{2^n}{n}$$

Вопрос №8.
Сложность алгоритмов. Классы P и NP. Теорема об NP-полноте задачи о выполнимости.

Пусть $A=\{a_1,\dots,a_l\}$ - алфавит МТ, a_1 -пустой символ. $Q=\{q_1,\dots,q_r\}$-множество состояний, q_1 -начальное состояние. Лента у МТ бесконечна только с одной стороны:



Предположим, что в момент *t* на ленте записано слово $w=b_1b_2\dots b_m$. Это означает, что в первых *m* ячейках ленты нет пустых символов, а все остальные ячейки содержат символ a_1. Пусть в момент времени *t* МТ находится в состоянии q_j, а головка обозревает ячейку с номером *k*.

Конфигурацией, соответствующей такту *t*, называется слово вида $c_t=b_1b_2\dots b_{k-1}q_jb_k\dots b_m$.

Вычислением МТ Т на входе *w* называется последовательность конфигураций $c_1,c_2,\dots,c_t,\dots$, возникающих при работе над словом *w*.

МТ называется *детерминированной*, если для каждой пары вида *(a,q)*, $a\in A, q\in Q$ в программе МТ присутствует не более одной команды вида $aq\to a'q'd$. Если существует пара *(a,q)*, для которой существует ≥ 2 команд, начинающихся с *aq*, то МТ называется *недетерминированной*.

Пусть *A* – конечный алфавит. Через A^* обозначим множество всех конечных слов в алфавите *A*. Произвольное подмножество $L\in A^*$ называется *языком* в алфавите *A*.

Будем говорить, что МТ(НМТ) Т распознает язык *L*, если для любого слова $w\in L$ существует принимающее вычисление, которое начинается с конфигурации $c_1=q_1w$ и для любого $w\notin L$ каждое вычисление либо бесконечно, либо является отвергающим.

Говорят, что МТ(НМТ) Т распознает язык *L* за полиномиальное время, если она распознает *L* и существует полином *p* такой, что для каждого слова $w\in L$ существует принимающее вычисление длины, не превышающей $p(||w||)$.

Через P обозначим класс языков, распознающихся МТ за полиномиальное время. Класс языков, распознающихся НМТ за полиномиальное время, обозначим через NP.

Пусть *П* – множество отображений вида $f: A^*\to A^*$, вычисляемых МТ за полиномиальное время. Пусть *L* и *K* – языки. Говорят, что *L полиномиально сводится* к *K*($L\prec K$), если существует $f\in \Pi : f(w)\in K \Leftrightarrow w\in L$.

Язык называется *NP-полным*, если:

1) $L\in NP$;
2) $\forall K\in NP \Rightarrow K\prec L$.

Утверждение 1. Если $L\prec K$ и $K\prec H$, то $L\prec H$.

Утверждение 2. Если $K\in P$ и $L\prec K$, то $L\in P$.

Утверждение 3. $P\subseteq NP$.

Утверждение 4. Либо все *NP*-полные языки принадлежат *P*, либо ни один из них не принадлежит *P*. Первое имеет место тогда и только тогда, когда *P=NP*.

Язык Выполнимость (ВЫП):

$A=\{(,),\&,\vee,\neg,x_i, i=1,2,\dots\}$

$w\in ВЫП \Leftrightarrow w$-КНФ, не равная тождественно 0.

Теорема Кука. Если $L\in NP$, то $L\prec ВЫП$.

Доказательство. Поскольку $L\in NP$, то существует НМТ, распознающая язык *L* за полиномиальное время. Пусть полином *p(x)* и НМТ М таковы, что М распознает *L* и $t_M(w)\leq p(||w||)\forall w\in L$. Укажем способ построения по произвольному слову **w** КНФ

$A(w) = A(w, M, p)$, выполнимой тогда и только тогда, когда $w \in L$. Тем самым будет указано отображение $f : L \to ВЫП$, удовлетворяющее условию $w \in L \Leftrightarrow A(w) \in ВЫП$.

Занумеруем ячейки односторонней ленты НМТ М слева направо натуральными числами. Пусть $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_l\}$-алфавит ленты НМТ М, $\{q_1, \dots, q_r\}$-множество состояний НМТ, $w \in \Sigma$-произвольное слово длины *n*. Положим *T=p(n).*

Введем переменные:

$P^i_{s,t}, 1 \le i \le l, 1 \le s,t \le T$. Переменная $P^i_{s,t} = 1 \Leftrightarrow$ ячейка с номером *s* на шаге *t* содержит символ a_i;

$Q^j_t, 1 \le j \le r, 1 \le t \le T$. Переменная $Q^j_t = 1 \Leftrightarrow$ на шаге *t* НМТ находится в состоянии q_j;

$S_{s,t}, 1 \le s,t \le T$. Переменная $S_{s,t} = 1 \Leftrightarrow$ на шаге *t* ячейка с номером s обозревается головкой.

Строим КНФ $A(w) = B \,\&\, C \,\&\, D \,\&\, E \,\&\, F \,\&\, G$, образующуюся следующим образом:

B утверждает, что на каждом шаге *t* обозревается одна и только одна ячейка. *B* является конъюнкцией $B_1 \,\&\, B_2 \,\&\, \dots \,\&\, B_T$, где B_t утверждает, что на шаге *t* обозревается одна и только одна ячейка:

$$B_t = (S_{1,t} \vee S_{2,t} \vee \dots \vee S_{T,t}) \wedge [\bigwedge_{1 \le i < j \le T} (\overline{S}_{i,t} \vee \overline{S}_{j,t})]$$

Для $1 \le s,t \le T$ формула $C_{s,t}$ утверждает, что на шаге *t* в ячейке *s* находится один и только один символ, а *C* является конъюнкцией всех таких $C_{s,t}$.

$D = \bigwedge_{t=1}^{T} D_t$, где D_t утверждает, что для каждого *t* НМТ находится ровно в одном состоянии.

Формула *E* утверждает, что выполняются начальные условия:

$$E = Q^1_1 \,\&\, S_{1,1} \,\&\, P^{i_1}_{1,1} \,\&\, P^{i_2}_{2,1} \,\&\, \dots \,\&\, P^{i_n}_{n,1} \,\&\, P^1_{n+1,1} \,\&\, \dots \,\&\, P^1_{T,1}.$$

$w = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}$-входное слово, q_1-начальное состояние, a_1-пустой символ.

Формула *F* утверждает, что для каждого шага *t* преобразование слова на ленте, сдвиг головки и изменение состояния осуществляется в соответствии с программой НМТ. Если же ячейка не обозревается, то содержимое ее не изменяется. *F* представляет собой конъюнкцию функций $F_{s,t}$ по всем *s,t.* Формула $F_{s,t}$ утверждает

1) если ячейка с номером *s* не обозревается на шаге *t*, то символ, находящийся в ней, не изменяется;
2) если же *s*-я ячейка обозревается на шаге *t*, то изменения состояния и символа в обозреваемой ячейке, а также сдвиг головки производится в соответствии с программой НМТ по символу, находящемуся в *s*-ой ячейке и состоянию НМТ.

Пусть $R_{s,t,i,j}$ означает следующее: при условии, что на шаге *t* обозревается ячейка *s*, из того, что в обозреваемой ячейке ленты записан символ a_i и НМТ находится в состоянии q_j, следует, что НМТ действует в соответствии хотя бы с одной из команд, начинающихся с пары $a_i q_j$. Пусть, например, в программе НМТ присутствуют две команды с началом $a_i q_j : a_i q_j \to a_{i_1} q_{j_1} L$ и $a_i q_j \to a_{i_2} q_{j_2} R$. Тогда высказывание $R_{s,t,i,j}$ имеет следующий вид:

$$R_{s,t,i,j} = \overline{P}^i_{s,t} \vee \overline{Q}^j_t \vee P^{i_1}_{s,t+1} \,\&\, Q^{j_1}_{t+1} \,\&\, S_{s-1,t+1} \vee P^{i_2}_{s,t+1} \,\&\, Q^{j_2}_{t+1} \,\&\, S_{s+1,t+1}$$

Тогда $F_{s,t} = \overline{S}_{s,t} \,\&\, [\bigwedge_{1 \le i \le l} (\overline{P}^i_{s,t} \vee P^i_{s,t+1})] \vee S_{s,t} \,\&\, [\bigvee_{1 \le i \le l} \bigvee_{1 \le j \le r} R_{s,t,i,j}]$.

Наконец, формула *G* утверждает, что на некотором шаге НМТ придет в принимающее заключительное состояние: $G = Q^r_1 \vee Q^r_2 \vee \dots \vee Q^r_T$.

Представим каждый множитель B,C,D,E,F,G КНФ, Тогда КНФ $A(w) = 1 \Leftrightarrow w \in L$.

Язык k-ВЫП.

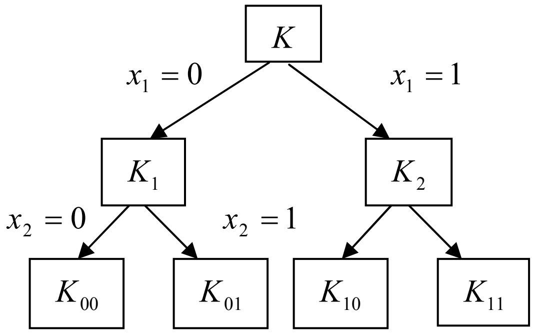
ВХОД: k-КНФ $F(x_1,\ldots,x_n)$;

СВОЙСТВО: выполнимость.

k-КНФ – конъюнкция скобок, каждая из которых является дизъюнкцией не более k букв.

Теорема. Язык $ВЫП \in NP$.

Доказательство.



При каждом способе подстановок такого типа будет получена некоторая КНФ с *const* вместо переменных. Проверка равенства каждой из КНФ единице может быть осуществлено детерминированной МТ за время, не превосходящее *O(L)*, *L* – длина кода *w(K).* КНФ К выполнима, если хотя бы при одной подстановке *const* НМТ останавливается в принимающем состоянии.

Код КНФ – слово *w(K)* в алфавите $\{0,1,\&.\vee,(,)\}$, получаемое заменой в *K* каждой буквы x_i^σ двоичным символом вида $\sigma\alpha_1\ldots\alpha_m$, где $\alpha_1\ldots\alpha_m$ -двоичное разложение числа *i*, $m = \lceil log_2 n \rceil$

Следствие теоремы Кука. Язык ВЫП – NP-полный.

Вопрос №9.
Независимые случайные величины. Критерий независимости случайных величин.

Пусть задан класс **A** подмножеств в множестве Ω.

Определение. Класс **A** называется полуалгеброй, если

a) $\Omega \in A$;

b) Из того, что $A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{A}$ следует, что $A \cap B = AB \in \mathbf{A}$.

c) Из того, что $A \in \mathbf{A}$ следует, что найдутся такие $A_1, \ldots, A_n \in \mathbf{A}$, что $A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$ и $\overline{A} = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ (в **A** каждое множество является частью некоторого конечного разбиения).

Определение. Класс **A** называется алгеброй (σ-алгеброй), если

a) $\Omega \in A$;

b) Из того, что $A \in \mathbf{A}$ следует, что $\overline{A} \in \mathbf{A}$.

c) Для любых $A_1, \ldots, A_n \in \mathbf{A}$ выполняется $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathbf{A}$ (соответственно, для любой последовательности $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathbf{A}$ выполняется $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbf{A}$).

Иными словами, σ-алгебра – это класс множеств, который замкнут относительно счетных операций дополнения и объединения.

Определение. Борелевской σ-алгеброй **B** подмножеств **R** называется минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые множества на прямой.

Определение. Пусть даны (Ω, A)-измеримое пространство и (**R**,**B**), где **B** – борелевская σ-алгебра множеств на числовой прямой **R**. Тогда измеримая функция $\xi : \Omega \to \mathbf{R}$ называется случайной величиной.

Определение. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называются независимыми, если $\forall B_1, \ldots, B_n \in \mathbf{B} \Rightarrow P(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2, \ldots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1) \cdot P(\xi_2 \in B_2) \cdot \ldots \cdot P(\xi_n \in B_n)$.

Теорема 1. Пусть случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ взаимно независимы. Тогда и любые k из них взаимно независимы:

$$1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le n$$

$\xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_k}$ - взаимно независимы.

Теорема 2. Пусть имеется n взаимно независимых случайных величин, $n = n_1 + \ldots + n_k$,

$$\xi_{1,1}, \ldots, \xi_{1,n_1}$$
$$\xi_{2,1}, \ldots, \xi_{2,n_2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\xi_{k,1}, \ldots, \xi_{k,n_k}$$

Тогда случайные величины $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$:

$$\zeta_1 = g_1(\xi_{1,1}, \ldots, \xi_{1,n_1})$$
$$\zeta_2 = g_2(\xi_{2,1}, \ldots, \xi_{2,n_2})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\zeta_k = g_k(\xi_{k,1}, \ldots, \xi_{k,n_k})$$

будут взаимно независимыми.

Теорема (критерий независимости случайных величин). Для того, чтобы $\xi_1, \ldots, \xi_n$ были взаимно независимыми, необходимо и достаточно, чтобы при любом

выборе n интервалов $[a_1, b_1), \ldots, [a_n, b_n)$ на числовой прямой
$P\{w : a_1 \le \xi_1(w) < b_1, \ldots, a_n \le \xi_n(w) < b_n\} = P\{w : a_1 \le \xi_1(w) < b_1\} \cdot \ldots \cdot P\{w : a_n \le \xi_n(w) < b_n\}$

Для любых действительных значений x и y выполняется соотношение $P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$, или функция совместного распределения случайных величин X и Y равна произведению функций распределения: $F_{x,y}(x, y) = F_x(x)F_y(y)$.

Свойства независимых случайных величин:

Для независимых случайных величин X и Y

$$E(XY) = EX \cdot EY$$

$$D(X + Y) = DX + DY$$

Доказательство (для математических ожиданий).

Обозначим

$$A_j = \{w : X(w) = x_j\}$$

$$B_k = \{w : Y(w) = y_k\}$$

$w \in A_j \cap B_k$

$X(w)Y(w) = x_j y_k \Rightarrow E(XY) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{m} x_j y_k P\{A_j \cap B_k\} = \{\text{т.к. события независимы}\}$

$= \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{m} x_j y_k P\{A_j\} P\{B_k\} = \sum_{j=1}^{l} x_j P\{A_j\} \cdot \sum_{k=1}^{m} y_k P\{B_k\} = EX \cdot EY$

Доказательство (для дисперсий).

$X + Y - (\alpha + \beta) = (X - \alpha) + (Y - \beta) = X' + Y'$, где $\alpha = EX, \beta = EY$, $EX' = EY' = 0$,

$D(X + \alpha) = DX \Rightarrow$

$D(X + Y) = D(X' + Y') = E(X' + Y')^2 = EX'^2 + 2EX'Y' + EY'^2 = EX'^2 + 2EX' \cdot EY' + EY'^2 =$

$= DX + 0 + DY = DX + DY$

Билет 10. Моменты случайных величин. Свойства математических ожиданий и дисперсий

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, A, P).

Определение 1. Математическим ожиданием случайной величины ξ называется

$$E\xi = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega) \qquad (1)$$

При этом если $E\xi < \infty$, то говорят, что математическое ожидание существует.

Определение 2. Моментом порядка k случайной величины ξ называется математическое ожидание случайной величины $\xi^k : E\xi^k$.

Определение 3. Центральным моментом порядка k случайной величины ξ называется

$$E(\xi - E\xi)^k$$

Определение 4. Центральный момент порядка 2 случайной величины ξ называется Дисперсией случайной величины ξ:

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2$$

Все введенные величины однозначно определяются распределением вероятностей случайной величины ξ.

Утверждение. $E\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x P_\xi(dx)$ где $P_\xi(B) = P(\xi \in B) = P(\omega : \xi(\omega) \in B)$ – распределение вероятностей случайной величины ξ.

Доказательство. В определении математического ожидания (1) делаем замену переменной $x = \xi(\omega)$, следовательно, $E\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x dF_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x P_\xi(dx)$ и утверждение доказано.

1. Пусть $\xi(\omega)$ – дискретная случайная величина с множеством значений $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ $p_i = P(\xi = x_i)$ иначе говоря, P_ξ - атомическая мера с атомами $x_1, x_2, ...$ Тогда

$$E\xi = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(\xi = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i,$$

так как $\xi(\omega) = x_i$, $\omega \in A_i$, $P(A_i) = p_i$.

2. Пусть $\xi(\omega)$ – абсолютно непрерывная случайная величина $p_\xi(x)$ - плотность распределения ξ. Тогда

$$E\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x) dx.$$

3. Функция от случайной величины также будет являться случайной величиной:
   a. Случайная величина ξ - дискретная

$$E\varphi(\xi) = \int \varphi(\xi(\omega)) P(d\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) P_\xi(dx) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(x_i) P(\xi = x_i)$$

   b. Случайная величина ξ - абсолютно непрерывная

$$E\varphi(\xi) = \int \varphi(\xi(\omega)) P(d\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) P_\xi(dx) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) p_\xi(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x P_{\varphi(x)}(x) dx$$

4. В случае дискретной случайной величины дисперсия записывается в виде

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E\xi)^2 p_i$$

и представляет собой степень «разброса» значений случайной величины относительно ее математического ожидания.

Свойства моментов.

Свойства матматического ожидания:

1.$E(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha E\xi + \beta E\eta.$

2.$\xi \geq 0 \Rightarrow E\xi \geq 0.$

3.$\xi \leq \eta \Rightarrow E\xi \leq E\eta.$

4.$\left|E\xi\right| \leq E\left|\xi\right|.$

5.$EC = C.$

Свойства дисперсии:

6.$D(\alpha\xi) = \alpha^2 D\xi.$

7.$D(\xi + C) = D\xi.$

8.$\exists E\xi^k < \infty \Rightarrow \exists E\xi^m, \forall m \leq k(\left|\xi^m\right| \leq 1 + \left|\xi^k\right|, m \leq k)$

Введем следующие определения.

Определение. Ковариацией случайных величин ξ и η называется величина

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)$$

Определение. Корреляцией случайных величин ξ и η называется величина

$$cor(\xi,\eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$$

Продолжим ряд свойств:

9. Если ξ и η независимы, то $E\xi\eta = E\xi E\eta$, при условии что математические ожидания существуют. Обратное неверно.

10. Если ξ и η независимы, то $\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 0, D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta.$

11. $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\operatorname{cov}(\xi,\eta)$ если ξ и η - не независимые.

12. $\left|\operatorname{cov}(\xi,\eta)\right| \leq \dfrac{D\xi + D\eta}{2}$

13. $\left|\operatorname{cov}(\xi,\eta)\right| \leq \sqrt{D\xi} + \sqrt{D\eta} \Rightarrow \left|\operatorname{cov}(\xi,\eta)\right| \leq 1,$ причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $\exists a, b \in R : \eta = a\xi + b.$

Вопрос 11
Центральная предельная теорема

Опр. Пусть ξ - случайная величина. Характеристической функцией случайной величины ξ называется функция, определённая $\forall t \in \mathrm{R}$ как $\varphi_\xi(t) = \mathrm{E}e^{it\xi} = \mathrm{E}\cos(t\xi) + i \cdot \mathrm{E}\sin(t\xi)$.

Теорема (Хинчин). Пусть ξ_1, $\xi_2, \ldots$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, у которых существует $\mathrm{E}\xi_i = a$. Обозначим $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$. Тогда выполняется закон больших чисел, то есть $\frac{S_n - \mathrm{E}S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем полагать $a = 0$. Пусть $\varphi(t)$ - характеристическая функция случайной величины ξ_1. Разложим её по формуле Маклорена до двух членов включительно с остаточным членом в форме Пеано: $\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + o(t)$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 0$, следовательно, $\varphi(t) = 1 + o(t)$, $t \to 0$. Тогда

$$\varphi_{\frac{S_n - \mathrm{E}S_n}{n}}(t) = \varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \mathrm{E}e^{it\frac{S_n}{n}} = \mathrm{E}e^{i\frac{t}{n}S_n} = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{E}e^{i\frac{t}{n}\xi_j} = \left(\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \left(1 - o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$

следовательно, $\xi \equiv 0$ и $\varphi_\xi(t) \equiv 1$. Таким образом, $\frac{S_n - \mathrm{E}S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ по распределению. Так как из сходимости по распределению к константе следует сходимость по вероятности. □

Теорема (Центральная предельная теорема). Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathrm{E}\xi_i = a$, $\mathrm{D}\xi_i = \sigma^2$. Тогда $\frac{S_n - \mathrm{E}S_n}{\sqrt{\mathrm{D}S_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi$, $\xi \sim N(0,1)$ по распределению, или, что то же самое

$$\mathrm{P}\left(\frac{S_n - na}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) = \mathrm{P}\left(\frac{S_n - \mathrm{E}S_n}{\sqrt{\mathrm{D}S_n}} < x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{t^2}{2}} dt.$$

Доказательство. Введём последовательность случайных величин $\eta_i = \frac{\xi_i - a}{\sigma}$. Тогда $\frac{S_n - \mathrm{E}S_n}{\sqrt{\mathrm{D}S_n}} = \frac{S_n - na}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\eta_1 + \ldots + \eta_n}{\sqrt{n}} = \eta$. Очевидно, $\mathrm{E}\eta_i = 0$, $\mathrm{D}\eta_i = 1$. Характеристическую функцию для случайной величины η разложим в ряд Тейлора в окрестности нуля до трёх членов включительно с остаточным членом в форме Пеано:

$$\varphi(t) = \mathrm{E}e^{it\eta} \Rightarrow \varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \varphi''(0)\frac{t^2}{2} + o(t^2),$$

следовательно, $\varphi(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ при $t \to 0$. Тогда

$$\varphi_{\frac{S_n - \mathrm{E}S_n}{\sqrt{\mathrm{D}S_n}}}(t) = \varphi_{\frac{\eta_1 + \ldots + \eta_n}{\sqrt{n}}}(t) = \left(\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Поскольку предельная функция непрерывна в нуле и $e^{\frac{t^2}{2}}$ - характеристическая функция стандартной нормальной величины, соответствующая последовательность $\frac{S_n - \mathrm{E}S_n}{\sqrt{\mathrm{D}S_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi$ по распределению.

Вопрос 12
Точечные и интервальные оценки неизвестных параметров распределения. Свойства точечных оценок (несмещенность, состоятельность, эффективность, оптимальность). Два метода построения точечных оценок (метод максимального правдоподобия, метод моментов)

Статистика.

Опр. Статистикой $T(X_1,\dots,X_n)$ называется любая измеримая функция T от выборки.

Опр. Выборочным моментом порядка k называется следующая статистика: $A_{kn}(X_1,\dots,X_n)=A_{nk}=A_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k$, при этом $A_1=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$ называется выборочным средним, или средним ожиданием.

Опр. Центральным выборочным моментом порядка k называется статистика $M_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^k$. Центральный выборочный момент порядка 2 называется также выборочной дисперсией: $M_2=S^2$.

Опр. Пусть $X_1,\dots,X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Тогда если у них существует математическое ожидание $\mathrm{E}_\theta X_1^k=\alpha_k(\theta)$, то оно называется теоретическим моментом порядка k.

Точечное оценивание.

Рассматривается выборка $X_1,\dots,X_n$ с функцией распределения $F(x,\theta)$, где $\theta\in\Theta\subset\mathrm{R}^m$.

Опр. Статистикой размерности k называется вектор-функция $T(X)=(T_1(X),\dots,T_k(X))$, где $T_i(X)$ – статистика $\forall i=1,\dots,k$.

Опр. Точечной оценкой параметра $\theta=(\theta_1,\dots,\theta_m)$ называется m-мерная статистика $T(X)=(T_1(X),\dots,T_m(X))$. При этом $T_i(X)$ считается оценкой θ_i.

Опр. Оценка $T(X)=(T_1(X),\dots,T_k(X))$ называется несмещенной оценкой функции $\tau(\theta)=(\tau_1(\theta),\dots,\tau_k(\theta))$, если для любого θ выполняется $\mathrm{E}_\theta T_i(X)=\tau_i(\theta)$, $i=1,\dots,k$.

Опр. Оценка $T(X)=(T_1(X),\dots,T_k(X))$ называется асимптотически несмещенной оценкой функции $\tau(\theta)=(\tau_1(\theta),\dots,\tau_k(\theta))$, если $\mathrm{E}_\theta T_i(X)=\tau_i(\theta)+\alpha_{ni}(\theta)$ и $\alpha_{ni}(\theta)\to 0$ при $n\to\infty$ для любого θ и для любого $i=1,\dots,k$.

Опр. Оценка $T(X)$ называется состоятельной оценкой функции $\tau(\theta)$, если $T(X)\to\tau(\theta)$ по вероятности при увеличении объема выборки ($n\to\infty$) для любого θ.

Опр. Оценка $T(X)$ функции $\tau(\theta)$ называется оптимальной, если

1. $T(X)$ - несмещенная, то есть $\mathrm{E}_\theta T(X)=\tau(\theta)$ и
2. $T(X)$ имеет равномерно минимальную дисперсию, то есть для любой другой несмещенной оценки $T_1(X)$ функции $\tau(\theta)$ выполняется $\mathrm{D}_\theta T(X)\le\mathrm{D}_\theta T_1(X)$ для любой выборки X.

Теорема. Если существует оптимальная оценка функции $\tau(\theta)$, то она единственна.

Функция правдоподобия.

Пусть X - случайная величина с распределением вероятностей $P_X(B)$. Абсолютная непрерывность функции $P_X(B)$ означает ее абсолютной непрерывность как меры относительно меры Лебега: $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_X(x)dx \geq 0$, где $p_X(x)$ – плотность.

Опр. Функция $p_X(x)$ называется обобщенной плотностью распределения случайной величины X относительно меры ν, если $P_X(B) = \int\limits_B p_X(x)\nu dx$, где ν - не обязательно мера Лебега.

Выборка $X_1, \dots, X_n$ с функцией распределения $F(x, \theta)$ допускает функцию правдоподобия, если существует такая мера μ, относительно которой существует обобщенная плотность распределения $p(x, \theta)$ для любого θ, то есть

$$F_X(x, \theta) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_X(u, \theta)\mu(du) \geq 0.$$

Опр. Функцией правдоподобия выборки $X_1, \dots, X_n$ называется функция $L(X, \theta) = p(X_1, \theta) \cdots p(X_n, \theta)$.

Функция правдоподобия является случайной величиной.

Метод моментов.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ - выборка с распределением $F(x, \theta)$, где $\theta \in \Theta \subset \mathrm{R}^m$. Обозначим $\mathrm{E}_\theta X_1^k = \alpha_k(\theta)$. Предположим, что система уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{i_1}(\theta) = A_{i_1}, \\ \alpha_{i_2}(\theta) = A_{i_2}, \\ \vdots \\ \alpha_{i_m}(\theta) = A_{i_m}, \end{cases} \quad i_j \neq i_l, \Leftarrow j \neq l$$

однозначно разрешима, причём её решение даётся обратимыми функциями

$$\begin{cases} \theta_1 = \psi_1(A_{i_1}, \dots, A_{i_m}), \\ \vdots \\ \theta_m = \psi_m(A_{i_1}, \dots, A_{i_m}), \end{cases} \quad i_j \neq i_l, \Leftarrow j \neq l$$

Оценки, полученные таким способом, называются точечными оценками, полученными методом моментов. Суть метода заключается в том, что выборочные моменты приравниваются теоретическим, откуда получаются значения параметров.

Теорема. Пусть $\theta_1, \dots, \theta_m$ являются непрерывными функциями от моментов $\hat{\theta}_i = \psi_i(A_{j_1}, \dots, A_{j_m}),\ i = 1, \dots, m$. Тогда оценки, полученные методом моментов с моментами порядков $j_1, \dots, j_m$, будут состоятельными и асимптотически несмещёнными.

Доказательство. Согласно нашим предположениям система имеет единственное решение $\hat{\theta}_i = \psi_i(A_{j_1}, \dots, A_{j_m}),\ i = 1, \dots, m$, причём ψ_i – непрерывные функции. По усиленному закону больших чисел ψ_i сходятся с вероятностью 1 к теоретическим моментам, а из непрерывности функции ψ_i отсюда следует, что оценки, получаемые методом моментов при $n \to \infty$ сходятся с вероятностью 1 к θ_i.

□

Метод максимального правдоподобия.

Пусть $L(X, \theta)$ - функция правдоподобия выборки X.

Опр. Оценкой максимального правдоподобия $\hat{\theta}(X)$ параметра θ называется такое значение параметра, что $\max L(X,\theta) = L\left(X,\hat{\theta}(X)\right)$.

Свойства метода максимального правдоподобия:

1. Если $\hat{\theta}(X)$ – оценка максимального правдоподобия θ и $\tau(\theta)$ – взаимно однозначная функция θ, то оценкой максимального правдоподобия функции $\tau(\theta)$ является функция $\tau\left(\hat{\theta}(X)\right)$.
2. Если существует достаточная статистика $T(X)$, то оценка максимального правдоподобия есть функция $T(X)$: $\hat{\theta}(X) = \varphi\left(T(X)\right)$.
3. Критерий факторизации: $L(X,\theta) = g\left(T(X),\theta\right)\cdot h(X)$.
4. Если существует эффективная оценка параметра θ, то она совпадает с оценкой максимального правдоподобия: $\exists\tilde{\theta}(X) \Rightarrow \hat{\theta}(X) = \tilde{\theta}(X)$. Действительно, $\tilde{\theta}(X) - \theta = a_n(\theta)\cdot\dfrac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial\theta}$ $\quad\forall\theta$. Пусть теперь $\theta = \hat{\theta}(X)$ - оценка максимального правдоподобия. Тогда $\tilde{\theta}(X) - \hat{\theta}(X) = a_n \cdot 0$, так как это точка, в которой достигается максимум функции правдоподобия.

Опр. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ асимптотически нормальна, если существуют такие $a_n, b_n \in \mathrm{R}$, что $\dfrac{\xi_n - a_n}{b_n} \to \xi \sim N(0,1)$.

Опр. Оценка $T_n(X)$ называется асимптотически нормальной, если $\dfrac{T_n(X) - a_n(\theta)}{b_n(\theta)} \to N(0,1)$.

Рассмотрим неравенство Рао-Крамера: $\mathrm{D}_\theta T_n(X) \ge \dfrac{\left(\tau'(\theta)\right)^2}{\mathrm{E}_\theta U^2(X,\theta)}$,

$$U = \frac{\partial \ln L(X,\theta)}{\partial\theta} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \ln p(X_i,\theta)}{\partial\theta} \Rightarrow \mathrm{E}_\theta U^2(X,\theta) = n\mathrm{E}_\theta\frac{\partial p(X_1,\theta)}{\partial\theta} = n\cdot i(\theta),$$ где $i(\theta)$ – некоторая функция.

Опр. Оценка $T_n(X)$ функции $\tau(\theta)$ называется асимптотически эффективной, если $\dfrac{\mathrm{D}_\theta T_n(X)\cdot ni(\theta)}{\left(\tau'(\theta)\right)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Пусть выполняются следующие два условия:

1) функция правдоподобия удовлетворяет условиям регулярности для первых двух производных (условиям регулярности второго порядка),
2) оценка максимального правдоподобия $\hat{\theta}(X)$ для всех θ существует, единственна и достигается во внутренней точке множества Θ.

Тогда оценка максимального правдоподобия $\hat{\theta}(X)$

1) асимптотически несмещена,
2) состоятельна,
3) асимптотически эффективна
4) асимптотически нормальна: $\sqrt{n\cdot i(\theta)}\left(\hat{\theta}(X) - \theta\right) \to N(0,1)$.

Интервальное оценивание.

Опр. Доверительным интервалом с коэффициентом доверия $0 \le \alpha \le 1$ называется совокупность двух статистик $(T_1(X), T_2(X))$ таких, что

1. $\forall\theta \Rightarrow T_1(X) \le T_2(X)$ почти всюду
2. $\forall\theta \Rightarrow \mathrm{P}_\theta(T_1(X) \le \theta \le T_2(X)) \ge \alpha$ иногда (= или >).

При таком распределении точность оценивания есть длина интервала, а надежность – вероятность попадания параметра в этот интервал. Мы фиксируем надежность и ищем наиболее узкий интервал.

Вопрос 13
Основные понятия о проверке статистических гипотез. Лемма Неймана-Пирсона

Гипотезы.

Пусть $X_1,\dots,X_n$ – выборка с распределением $F(X,\theta)$, где $\theta\in\Theta\subset R$. В этом случае любое подмножество $\Theta_0\subset\Theta$ соответствует гипотезе: $\Theta_0\to H_0:\theta\in\Theta_0$ – основная гипотеза, $\Theta_1\to H_1:\theta\in\Theta_1$ – альтернатива, причем $\Theta_0\cap\Theta_1=\varnothing$.

Опр. Гипотеза Θ_0 называется простой, если она состоит из одной точки: $\Theta_0=\{\theta_0\}$, и сложной в противном случае.

Пусть $\varphi(X)=\varphi(X_1,\dots,X_n)$: $0\le\varphi(X)\le 1$ – критическая функция, при этом по определению $\varphi(X)$ – это вероятность отвергнуть основную гипотезу при выборке $X_1,\dots,X_n$.

Ошибка первого рода заключается в том, что основная гипотеза H_0 отвергается, в то время как она верна; ошибка второго рода – H_0 принимается, в то время как она неверна. Исходя из определения критической функции (критерия), вероятностью ошибки первого рода является математическое ожидание $E_\theta\varphi(X)=\alpha(X)$, $\theta\in\Theta_0$.

Опр. Функцией мощности называется $\beta(\theta)=E_\theta\varphi(X)$, $\theta\in\Theta_1$ – вероятность принятия правильного решения в случае справедливости альтернативной гипотезы.

Из определения следует, что вероятность ошибки второго рода равна $1-\beta(\theta)$.

Опр. Если критерий не принимает иных значений, кроме 0 и 1, то он называется нерандомизированным, если же критерий хотя бы в одной точке принимает значение, лежащее строго между 0 и 1, то он называется рандомизированным. Размером критерия называется наибольшая вероятность ошибки первого рода: $\max\limits_{\theta\in\Theta_0}\alpha(\theta)=\alpha$.

Будем выбирать критерии так, чтобы при фиксированном α достичь $\max\beta(\theta)$.

Опр. Критерий $\varphi(X)$ называется равномерно наиболее мощным критерием размерности α, если

1. $\max\limits_{\theta\in\Theta_0}E_\theta\varphi(X)=\alpha$
2. для любого критерия φ^* размерности α и для любого $\theta\in\Theta_1\Rightarrow$ $E_\theta\varphi(X)\ge E_\theta\varphi^*(X)$.

Лемма Неймана-Пирсона.

Лемма (Нейман, Пирсон). Пусть выборка $X_1,\dots,X_n$ имеет функцию распределения $F(X,\theta)$, где $\theta\in\Theta\subset R$ и функцию правдоподобия $L(X,\theta)$. Введем класс Φ критических функций: относительно двух простых гипотез $H_0:\theta=\theta_0, H_1:\theta=\theta_1\ne\theta_0$, $0<\alpha<1$, где α – заданный размер критерия, K_α – некоторое значение:

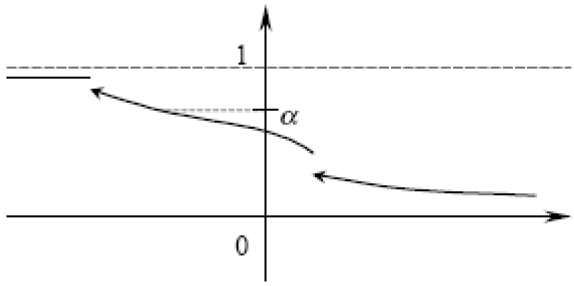
$$\Phi=\left\{\varphi:\varphi(X)=\begin{cases}1, & \dfrac{L(X,\theta_1)}{L(X,\theta_0)}>K_\alpha,\\ 0, & \dfrac{L(X,\theta_1)}{L(X,\theta_0)}<K_\alpha.\end{cases}\right\}$$

Отметим, что класс включает в себя все функции, удовлетворяющие указанным условиям и принимающие при $\dfrac{L(X,\theta_1)}{L(X,\theta_0)} = K_\alpha$ любые значения. Отметим также, что для разных значений K_α соответствующие классы Φ будут, вообще говоря, разными. Тогда:

1. $\forall\ 0 < \alpha < 1 \Rightarrow \exists \varphi \in \Phi : E_{\theta_0}\varphi(X) = \alpha$ (существует критерий любого размера);
2. Если $\varphi \in \Phi$ и $E_{\theta_0}\varphi(X) = \alpha$, то φ – наиболее мощный критерий;
3. Если φ – наиболее мощный критерий размера α, то $\varphi \in \Phi$ (необходимость).

Доказательство. 1. Введем функцию $\alpha(c) = P_{\theta_0}\left(\dfrac{L(X,\theta_1)}{L(X,\theta_0)} > c\right)$. $\alpha(c)$ монотонно возрастает, непрерывна слева и $\alpha(c) \xrightarrow[c\to-\infty]{} 1$, $\alpha(c) \xrightarrow[c\to+\infty]{} 0$. Возможны два случая:

a) Существует такое $c = K_\alpha$: $\alpha(K_\alpha) = \alpha$.
Тогда положим

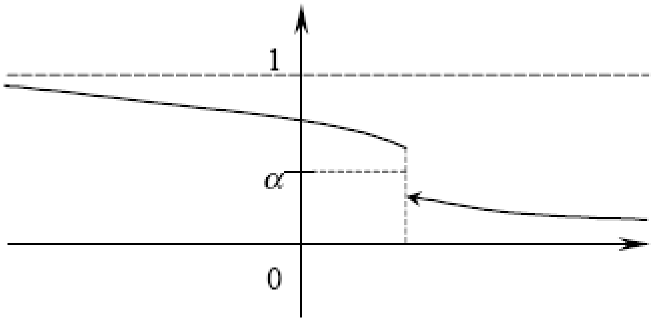


$$\varphi(X) = \begin{cases} 1, & \dfrac{L(X,\theta_1)}{L(X,\theta_0)} > K_\alpha, \\ 0, & \dfrac{L(X,\theta_1)}{L(X,\theta_0)} \le K_\alpha. \end{cases}$$

Очевидно, что $\varphi(X) \in \Phi$ и

$$E_{\theta_0}\varphi(X) = 1 \cdot P_{\theta_0}\left(\frac{L(X,\theta_1)}{L(X,\theta_0)} > K_\alpha\right) = \alpha.$$

b) Существует K_α такое, что $\alpha(K_\alpha) < \alpha < \alpha(K_\alpha - 0)$. В этом случае положим



$$\varphi(X) = \begin{cases} 1, & \dfrac{L(X,\theta_1)}{L(X,\theta_0)} > K_\alpha, \\ \gamma_\alpha, & \dfrac{L(X,\theta_1)}{L(X,\theta_0)} = K_\alpha, \\ 0, & \dfrac{L(X,\theta_1)}{L(X,\theta_0)} < K_\alpha, \end{cases}$$

где $\gamma_\alpha = \dfrac{\alpha - \alpha(K_\alpha)}{\alpha(K_\alpha - 0) - \alpha(K_\alpha)}$. Очевидно, $0 < \gamma_\alpha < 1$ и

$$E_{\theta_0}\varphi(X) = 1 \cdot P_{\vartheta_0}\left(\frac{L(X,\theta_1)}{L(X,\theta_0)} > K_\alpha\right) + \gamma_\alpha P_{\vartheta_0}\left(\frac{L(X,\theta_1)}{L(X,\theta_0)} = K_\alpha\right) =$$

$$= \alpha(K_\alpha) + \frac{\alpha - \alpha(K_\alpha)}{\alpha(K_\alpha - 0) - \alpha(K_\alpha)} \cdot (\alpha(K_\alpha - 0) - \alpha(K_\alpha)) = \alpha$$

Попутно доказано (случай b), что существует функция из класса φ, постоянная на границе (γ_α не зависит от X).

2. и 3. Пусть $\varphi \in \Phi$ – критерий размера α. Пусть φ^* – какой-либо другой критерий размера α. Покажем, что $\varphi^* \in \Phi$. Для этого рассмотрим функцию

$$(\varphi(X) - \varphi^*(X))(L(X,\theta_1) - K_\alpha L(X,\theta_0))$$

и интеграл от нее

$$\int_{R^n} (\varphi(X) - \varphi^*(X))(L(X,\theta_1) - K_\alpha L(X,\theta_0))\mu(dx)$$

Разобьем множество, на котором подынтегральная функция равна нулю на две части: $A = \{x : L(x,\theta_1) = K_\alpha L(x,\theta_0)\}$, $B = \{x : \varphi(x) = \varphi^*(x)\}$.

Имеем

$$\int_{R^n \setminus A} (\varphi(X) - \varphi^*(X))(L(X,\theta_1) - K_\alpha L(X,\theta_0))\mu(dx) \geq 0$$

Рассмотрим значения x: $L(x,\theta_1) - K_\alpha L(x,\theta_0) > 0$. При этом $\varphi = 1$, $\varphi^* \leq 1 \Rightarrow$ $\varphi - \varphi^* \geq 0$ и подынтегральная функция неотрицательна. При x: $L(x,\theta_1) - K_\alpha L(x,\theta_0) < 0$, очевидно, $\varphi = 0$, $\varphi^* \geq 0 \Rightarrow \varphi - \varphi^* \leq 0$ и подынтегральная функция снова неотрицательна. При этом

$$\int_{R^n \setminus A \setminus B} (\varphi(X) - \varphi^*(X))(L(X,\theta_1) - K_\alpha L(X,\theta_0))\mu(dx) > 0,$$

следовательно, возможно $\varphi(X) = \varphi^*(X)$ почти всюду, возможно их различия сосредоточены на границе. Поскольку класс Φ допускает любые значения на границе, $\varphi^* \in \Phi$.

Пусть теперь $\varphi^* \notin \Phi$ $(>)$. Тогда

$$\int_{R^n} (\varphi(X) - \varphi^*(X))(L(X,\theta_1) - K_\alpha L(X,\theta_0))\mu(dx) \overset{(>)}{\geq} 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{R^n} (\varphi(X) - \varphi^*(X))L(X,\vartheta_1)\mu(dx) - K_\alpha \underbrace{\int_{R^n} (\varphi(X) - \varphi^*(X))L(X,\theta_0)\mu(dx)}_{=\underbrace{E_{\theta_0}\varphi(X)}_{=\alpha} - \underbrace{E_{\theta_0}\varphi^*(X)}_{=\alpha} = 0} \overset{(>)}{\geq} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{R^n} \varphi(X)L(X,\theta_1)\mu(dx)}_{=\beta(\theta_1)=E_{\theta_1}\varphi(X)} \overset{(>)}{\geq} \underbrace{\int_{R^n} \varphi^*(X)L(X,\theta_1)\mu(dx)}_{=\beta^*(\theta_1)=E_{\theta_1}\varphi^*(X)} \Leftrightarrow \beta(\theta_1) \overset{(>)}{\geq} \beta^*(\theta_1)$$

и из того, что $\varphi^* \notin \Phi$ следует, что φ^* не является наиболее мощным.

□

Вопрос 14
Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

Доверительные интервалы.

Будем рассматривать случай одномерного параметра. Под термином интервал в дальнейшем подразумевается некоторое множество, не обязательно интервал в геометрическом смысле.

Опр. Доверительным интервалом с коэффициентом доверия $0 \le \alpha \le 1$ называется совокупность двух статистик $(T_1(X), T_2(X))$ таких, что

1. $\forall \theta \Rightarrow T_1(X) \le T_2(X)$ почти всюду,
2. $\forall \theta \Rightarrow P_\theta(T_1(X) \le \theta \le T_2(X)) \ge \alpha$ (иногда = или >).

При таком распределении точность оценивания есть длина интервала, а надежность – вероятность попадания параметра в этот интервал. Возникает дилемма: что делать больше – точность или надежность: при увеличении надежности страдает точность и наоборот. Действительно, надежность можно сделать равной 1, положив интервал $(-\infty, +\infty)$, точность можно сделать минимальной, положив $\alpha = 0$. В нашем случае фиксируется надежность и ищется наиболее узкий интервал.

Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при известном σ.

Опр. Нормальным называют распределение вероятности непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Распределение определяется двумя параметрами: α – математическое ожидание, σ – среднее квадратичное отклонение нормального распределения.

Опр. Функция Лапласа: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$.

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально, причем среднее квадратическое отклонение σ этого распределения известно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание α по выборочной средней $\bar{x}$. Поставим своей задачей найти доверительные интервалы, покрывающие параметр a с надежностью γ.

Будем рассматривать выборочную среднюю $\bar{x}$ как случайную величину $\bar{X}$ ($\bar{x}$ изменяется от выборки к выборке) и выборочные значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – как одинаково распределенные независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Другими словами, математическое ожидание каждой из этих величин равно a и среднее квадратическое отклонение – σ.

Примем без доказательства, что если случайная величина X распределена нормально, то выборочная средняя $\bar{X}$, найденная по независимым наблюдениям, также распределена нормально. Параметры распределения $\bar{X}$ таковы: $M(\bar{X}) = a$, $\sigma(\bar{X}) = \sigma/\sqrt{n}$.

Потребуем, чтобы выполнялось соотношение $P\left(\left|\bar{X} - a\right| < \delta\right) = \gamma$, где γ – заданная надежность.

Пусть X – нормальная случайная величина.

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left\{ \text{замена } z = \frac{x-a}{\sigma} \right\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{(\alpha-a)/\sigma}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} (\sigma dz) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\alpha-a)/\sigma}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{(\alpha-a)/\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$$= \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

$$P\left(|X-a| < \delta\right) = P(a-\delta < X < a+\delta) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) =$$

$$= \left\{ \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = -\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right), \text{т.к. функция Лапласа-нечетная} \right\} = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Заменив X на $\overline{X}$ и σ на $\sigma(\overline{X}) = \sigma/\sqrt{n}$, получим

$$P\left(\left|\overline{X}-a\right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t), \text{ где } t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}.$$

Найдя из последнего равенства $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$, получим

$$P\left(\left|\overline{X}-a\right| < \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t).$$

Приняв во внимание, что вероятность P задана и равна γ, окончательно имеем

$$P\left(\overline{x} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma.$$

Смысл полученного соотношения таков: с надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $\left(\overline{x} - t\sigma/\sqrt{n}, \overline{x} + t\sigma/\sqrt{n}\right)$ покрывает неизвестный параметр a; точность оценки $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$.

Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном σ.

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально, причем среднее квадратическое отклонение σ неизвестно.

Тогда по данным выборки можно построить случайную величину (ее возможные значения будем обозначать через t):

$$T = \frac{\overline{X} - a}{S/\sqrt{n}},$$

которая имеет распределение Стьюдента с $k = n-1$ степенями свободы. Здесь $\overline{X}$ – выборочная средняя, S – “исправленное” среднее квадратическое отклонение, n – объем выборки.

Пояснение терминов:

$\overline{x}_в = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$ – выборочная средняя,

$s^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i - \overline{x}_в\right)^2 \Big/ (n-1)$ – исправленная дисперсия (n_i – частота значения x_i),

$s = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i - \overline{x}_в\right)^2 \Big/ (n-1)}$ – исправленное среднее квадратическое отклонение.

Плотность распределения Стьюдента есть $S(t,n) = B_n \left[1 + \frac{t^2}{n-1}\right]^{-n/2}$, где $B_n = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi(n-1)}\Gamma((n-1)/2)}$, а $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ – гамма-функция, в частности $\Gamma(n+1) = n!$.

Итак, распределение Стьюдента определяется параметром n – объемом выборки (или, что то же, числом степеней свободы $k = n-1$) и не зависит от неизвестных параметров a и σ.

Поскольку $S(t,n)$ – четная функция от t, вероятность осуществления неравенства $\left|\frac{\bar{X}-a}{S/\sqrt{n}}\right| < \gamma$ определяется так: $P\left(\left|\frac{\bar{X}-a}{S/\sqrt{n}}\right| < t_\gamma\right) = 2\int_0^{t_\gamma} S(t,n)dt = \gamma$ или $P\left(\bar{X} - t_\gamma S/\sqrt{n} < a < \bar{X} + t_\gamma S/\sqrt{n}\right) = \gamma$.

Итак, пользуясь распределением Стьюдента, нашли доверительный интервал $\left(\bar{x} - t_\gamma S/\sqrt{n}, \bar{x} + t_\gamma S/\sqrt{n}\right)$, покрывающий параметр a с надежностью γ (t_γ находится по таблице по заданным n и γ).

Доверительные интервалы для оценки среднего квадратического отклонения σ нормального распределения.

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. Требуется оценить неизвестное генеральное среднее выборочное отклонение σ по “исправленному” выборочному среднему квадратичному отклонению s. Поставим задачу найти доверительные интервалы, покрывающие параметр σ с заданной надежностью γ.

Потребуем, чтобы выполнялось соотношение $P\left(|\sigma - s| < \delta\right) = \gamma$, или $P(s-\delta < \sigma < s+\delta) = \gamma$.

Преобразуем неравенство

$$s - \delta < \sigma < s + \delta$$

в равносильное неравенство

$$s(1-\delta/s) < \sigma < s(1+\delta/s).$$

Положив $\delta / s = q$, получим

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q) \qquad (*)$$

Остается найти q. Для этого введем случайную величину $\chi = (S/\sigma)\sqrt{n-1}$, где n – объем выборки. Это квадратный корень из величины $S^2(n-1)/\sigma^2$, распределенной по закону χ^2 с $n-1$ степенями свободы.

Распределение χ^2.

Пусть X_i – нормальные независимые случайные величины, причем математическое ожидание каждой из них равно 0, среднее квадратическое отклонение – единице. Тогда сумма квадратов этих величин $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ распределена по закону χ^2 с $k = n$ степенями свободы; если же эти веичины связаны обним линейным соотношением, например $\sum X_i = n\bar{X}$, то число степеней свободы $k = n-1$.

Плотность этого распределения есть

$$f(x)=\begin{cases}0,\ \text{при } x\le 0\\ \dfrac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}e^{-\frac{x}{2}}\chi^{\frac{k}{2}-1},\ \text{при } x>0\end{cases}$$

Плотность распределения χ имеет вид:

$$R(\chi,n)=\frac{\chi^{n-2}e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)} \qquad (**)$$

Это распределение не зависит от оцениваемого параметра σ, а зависит лишь от объема выборки n.

Преобразуем неравенство $(*)$ так, чтобы оно приняло вид $\chi_1<\chi<\chi_2$. Вероятность этого неравенства равна заданной вероятности γ, т.е. $\int\limits_{\chi_1}^{\chi_2}R(\chi,n)d\chi=\gamma$.

Предполагая, что $q<1$, перепишем неравенство $(*)$ так:

$$\frac{1}{S(1+q)}<\frac{1}{\sigma}<\frac{1}{S(1-q)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q}<\frac{S\sqrt{n-1}}{\sigma}<\frac{\sqrt{n-1}}{1-q} \text{ или } \frac{\sqrt{n-1}}{1+q}<\chi<\frac{\sqrt{n-1}}{1-q}.$$

Вероятность того, что это неравенство, а, следовательно, и равносильное ему неравенство $(*)$ будет осуществлено, равна

$$\int\limits_{\sqrt{n-1}/(1+q)}^{\sqrt{n-1}/(1-q)}R(\chi,n)d\chi=\gamma.$$

Из этого уравнения можно по заданным n и γ найти q. Практически для отыскания q пользуются таблицей.

Вычислив по выборке s и найдя по таблице q, получим искомый доверительный интервал $(*)$, покрывающий σ с заданной надежностью γ, т.е. интервал $s(1-q)<\sigma<s(1+q)$.

Виды сходимости последовательностей случайных величин

Пусть случайная величина $\xi_n(\omega)$ задана на вероятностном пространстве (Ω_n, A_n, P_n)

Определение 1: Последовательность случ. величин $\{\xi_n\}$ сходится к случ. величине ξ *по вероятности*: $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n \overset{P}{=} \xi$, если $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 0$

Определение 2: Последовательность случ. величин $\{\xi_n\}$ сходится к случ. величине ξ *с вероятностью 1 (почти всюду)*: $\xi_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{с вероятностью } 1}{\to}} \xi$, если $P(\omega : \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)) = 1$

Введем множество $A = \{\omega : \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\}$. Его можно представить в виде
$A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=N}^{\infty} \left(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \frac{1}{k} \right) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \frac{1}{k} \right), A \in \mathrm{A}$, или, что то же самое, $A = \left(\omega : \forall k \in \mathrm{N}, \exists N : \forall n \geq N \Rightarrow |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \frac{1}{k} \right)$.

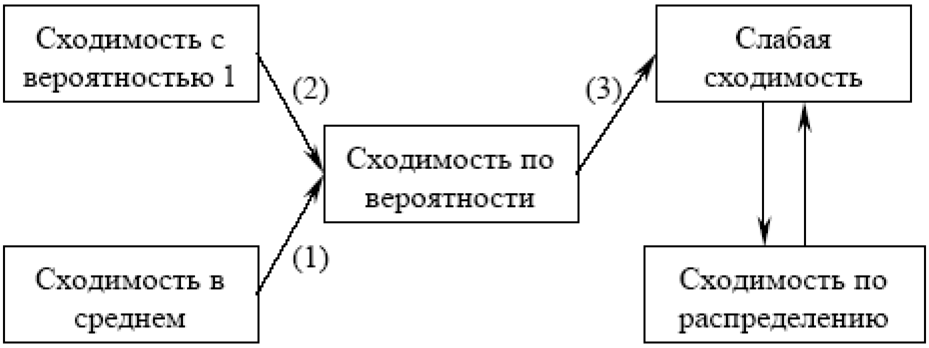
Тогда определение сходимости с вероятностью 1 можно переписать в виде: P(A)=1.

Определение 3: Последовательность случ. величин $\{\xi_n\}$ сходится к случ. величине ξ *в среднем порядка α>0*: $\xi_n \to \xi$, если $\lim\limits_{n\to\infty} E|\xi_n - \xi|^{\alpha} = 0$

Определение 4: Последовательность случ. величин $\{\xi_n\}$ сходится к случ. величине ξ *по распределению*: $\xi_n \to \xi$, если $F_{\xi_n}(x) \to F_{\xi}(x), \forall x_0 \Rightarrow F_{\xi}(x_0)$ непрерывна.

Определение 5: Последовательность случ. величин $\{\xi_n\}$ сходится к случ. величине ξ *слабо*: $\xi_n \Rightarrow \xi$, если для любой непрерывной ограниченной функции φ верно: $\lim\limits_{n\to\infty} E\varphi(\xi_n) = E\varphi(\xi)$

Покажем следующие импликации:



(1) Покажем, что их сходимости в среднем следует сходимость по вероятности. Действительно, используя неравенство Маркова,

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = P(|\xi_n - \xi|^\alpha > \varepsilon^\alpha) \le \frac{E|\xi_n - \xi|^\alpha}{\varepsilon^\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

(2) Докажем, что из сходимости с вероятностью 1 следует сходимость по вероятности. Перепишем определение сходимости с вероятностью 1:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\left(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \frac{1}{k}\right)\right) = 1 ,$$

или что то же самое

$$\forall k \Rightarrow P\left(\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\left(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \frac{1}{k}\right)\right) = 1 .$$

Введем множество

$$B_N = \bigcap_{k=N}^{\infty}\left(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \frac{1}{k}\right)$$

Очевидно, что $B_1 \subset \ldots \subset B_n \subset B_{n+1} \subset \ldots$. Из монотонности этой последовательности следует, что

$$\lim_{N\to\infty} B_N = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n .$$

Из непрерывности вероятности

$$\lim_{N\to\infty} P(B_N) = P(\lim_{N\to\infty} B_N) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = P\left(\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\left(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \frac{1}{k}\right)\right) = 1 .$$

Наконец,

$$1 \ge P\left(|\xi_n - \xi| < \frac{1}{k}\right) \ge P\left(\bigcap_{n=N}^{\infty}\left(|\xi_n - \xi| < \frac{1}{k}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \text{, следовательно,}$$

$$\text{из } \lim_{N\to\infty} P\left(|\xi_n - \xi| < \frac{1}{k}\right) = 1 \Rightarrow \lim_{N\to\infty} P\left(|\xi_n - \xi| \ge \frac{1}{k}\right) = 0 .$$

Утверждение доказано.

(3) Докажем, что из сходимости по вероятности следует слабая сходимость. Имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 0.$$

Надо доказать, что для любой ограниченной непрерывной функции φ выполняется

$$\lim_{n\to\infty} E\varphi(\xi_n) = E\varphi(\xi).$$

Действительно,

$$|E\varphi(\xi_n) - E\varphi(\xi)| \le E|\varphi(\xi_n) - \varphi(\xi)| = \int_\Omega |\varphi(\xi_n(\omega)) - \varphi(\xi(\omega))| P(d\omega) =$$

$$= \int\limits_{|\varphi(\xi_n(\omega)) - \varphi(\xi(\omega))| > \varepsilon} |\varphi(\xi_n(\omega)) - \varphi(\xi(\omega))| P(d\omega) + \int\limits_{|\varphi(\xi_n(\omega)) - \varphi(\xi(\omega))| \le \varepsilon} |\varphi(\xi_n(\omega)) - \varphi(\xi(\omega))| P(d\omega)$$

В силу ограниченности φ, имеем |φ(x)|<C, |φ(x)-φ(x)|<2C и

$$\int\limits_{\Omega} \left|\varphi(\xi_n(\omega)) - \varphi(\xi(\omega))\right| P(d\omega) < 2C \cdot P(\left|\xi_n - \xi\right| > \varepsilon) + \int\limits_{\varphi(\xi_n(\omega)) - \varphi(\xi(\omega)) \leq \varepsilon} \left|\varphi(\xi_n(\omega)) - \varphi(\xi(\omega))\right| P(d\omega)$$

Поскольку φ непрерывна, $\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 : \left|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)\right| \leq \varepsilon \Rightarrow \left|\varphi(\xi_n(\omega)) - \varphi(\xi(\omega))\right| < \delta$ и $2C \cdot P(\left|\xi_n - \xi\right| > \varepsilon) + \int\limits_{\varphi(\xi_n(\omega)) - \varphi(\xi(\omega)) \leq \varepsilon} \left|\varphi(\xi_n(\omega)) - \varphi(\xi(\omega))\right| P(d\omega) < 2C \cdot P(\left|\xi_n - \xi\right| > \varepsilon) + \delta$.

Поскольку $\exists N : \forall n \geq N \Rightarrow P(\left|\xi_n - \xi\right| > \varepsilon) < \dfrac{\delta}{2C}$, получаем

$$\left|E\varphi(\xi_n) - E\varphi(\xi)\right| < 2\delta .$$

Утверждение доказано.

Эквивалентность слабой сходимости и сходимости по распределению принимается без доказательства.

Источник – лекции Ушакова (2 курс)

16. Основная теорема матричных игр

Определение: *Смешанной стратегией* (СС) 1го игрока игры Г называется вероятностное распределение φ на множестве стратегий *X*.

Для 1го игрока применить СС φ – это выбрать стратегию $x \in X$ как реализацию случайной величины, имеющей законом распределения φ. Рассмотрим 3 вида СС:

1) Пусть $X = \{1,...,m\}$ (напр., как в матричной игре), тогда вместо φ для обозначения СС будем исп. «вероятностный» вектор $p = (p_1,...,p_m)$ т.ч.: $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$, $p_i \geq 0$, $i = 1,...,m$.
   Т.о. если применяется *p*, то стратегия *i* выбирается с вероятностью p_i. Пример: в игре «орлянка» полезно использовать СС $p^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, подбрасывая монету.
2) Пусть $X = [a,b]$ (как в непрерывной игре на прямоугольнике). Здесь СС – функция распределения φ на $[a,b]$.
3) Пусть *X* – выпуклый компакт евклидового пространства. Здесь СС может служить вероятностная мера, сосредоточенная в конечном числе точек:
   $$\varphi = \sum p_i I_{x^{(i)}}, \ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \ p_i \geq 0, \ x^{(i)} \in X, \ i = 1,...,m, \ I_{x^{(i)}}(x) = \begin{cases} 1, x = x^{(i)} \\ 0, x \neq x^{(i)} \end{cases}.$$
   При использовании φ стратегия $x^{(i)}$ выбирается с вероятностью p_i. Интеграл от непрерывной функции $h(x)$ по рассматриваемой мере имеет вид:
   $$\int_X h(x) d\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i h(x^{(i)}).$$

Обозначим $\{\varphi\}$ – множество всех СС первого игрока на множестве *X*. Можно считать, $X \subset \{\varphi\}$. Действительно, в последнем случае стратегию *x* можно отождествить с вероятностной мерой I_x. Если множество *X* конечно, тогда выбор *i* эквивалентен выбору СС $p = (0,...,1,...,0)$, где 1 стоит на *i*-том месте, а при $X = [a,b]$ стратегию $x \in [a,b]$ можно отождествить с функцией распределения, имеющей скачок 1 в точке *x*.
Множество *X* будем называть множеством *чистых стратегий* (ЧС) 1го игрока (в противовес смешанным).

Аналогично, $\{\psi\}$ – множество всех СС 2го игрока, т.е. вероятностных распределений ψ на мн-ве *Y* его ЧС. При заданных стратегиях φ и ψ математическое ожидание (МО) выигрыша 1го игрока определяется ф-лой:
$$F(\varphi,\psi) = \int_X \int_Y F(x,y) d\varphi(x) \psi(y).$$
Полагаем, что двойной интеграл существует.

Определение: Антагонистическая игра $\overline{\Gamma} = \left\langle \{\varphi\}, \{\psi\}, F(\varphi,\psi) \right\rangle$ наз. *смешанным расширением* игры Г.

Определение: Решение $\left(\varphi^0, \psi^0, \upsilon = F\left(\varphi^0, \psi^0\right)\right)$ игры $\overline{\Gamma}$ наз. *решением* исходной игры Г в СС. При этом φ^0, ψ^0 наз. *оптимальными смешанными стратегиями* игроков, а υ – значением игры Г.

Напомним:
матричная игра Г задается матрицей $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Множество СС 1го игрока –

$$P = \{p = (p_1, ..., p_m) \mid \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \, p_i \geq 0, i = 1, ..., m\},$$

Множество СС 2го игрока –

$$Q = \{q = (q_1, ..., q_n) \mid \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, \, q_j \geq 0, \, j = 1, ..., n\},$$

а МО выигрыша 1го игрока –

$$A(p, q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j$$

Т.о. $\overline{\Gamma} = \left\langle P, Q, A(p, q)\right\rangle$ смешанное расширение матричной игры Г.

Теорема [Т4 с.18]: (Основная теорема матричных игр):
Всякая матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях.

Доказательство:
Достаточно доказать, что функция $A(p,q)$ имеет на $P \times Q$ седловую точку. Множества *P*, *Q* – многогранники евклидовых пространств, а функция $A(p,q)$ билинейна, след. непрерывна на $P \times Q$, вогнута по *p* и выпукла по *q*. По [Теореме 1] (её нет в билете явно) $A(p,q)$ имеет на $P \times Q$ седловую точку. ■

Теорема 1 [Т3 с.13]:
Пусть $X \subset E^m$ и $Y \subset E^n$ – выпуклые компакты евклидовых пространств, а функция $F(x, y)$ непрерывна на $X \times Y$. Предположим, что при любом $y \in Y$ функция $F(x, y)$ вогнута по *x* и при любом $x \in X$ она выпукла по *y*. Тогда $F(x, y)$ имеет седловую точку на $X \times Y$.
■

Пример [3.2 с.18]: Игра против природы. Фермер (игрок 1) имеет участок земли, который можно засеять 3мя с/х культурами. Год может быть нормальным, засушливым и дождливым (3 стратегии игрока 2 – природы). Пусть $H = (h_{ij})_{3\times 3}$ – матрица урожайности, а b_i – цена за 1цу продукции *i*-го вида. Тогда $A = (b_i h_{ij})_{3\times 3}$ – матрица игры, где выигрыш фермера – стоимость произведенной продукции. Пусть $p^0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ – оптимальная смешанная стратегия игрока 1. Реализовать ее можно, засеяв половину участка 1ой культурой, а оставшиеся 2 четверти – 2ой и 3ей культурами.

17. Иерархические игры и их решение

Рассмотрим игры 2х лиц, в которых игроки прежде, чем выбрать стратегии $x \in X, y \in Y$, предварительно обмениваются информацией о своих выборах.
$\Gamma = \langle X, Y, F(x,y), G(x,y) \rangle$.
Игроки обмениваются информацией, а потом выбирают *x* и *y*.

Игра Γ_1
Пусть *X, Y* – компакты в метрических пространствах, а *F*, *G* – непрерывны на $X \times Y$

$$\Gamma_1 : x \xrightarrow{2} y$$

– одношаговая игра с полной информацией (2ой игрок знает ход 1го). Например, игрок 1 – центр, *x* – цена, игрок 2 – производитель, а *y* – продукция.

$$g : X \to Y, \ g(x) \in Y.$$

Первый игрок выбирает *x*, а 2ой – $g(x)$:

$$F(x,g) = F(x, g(x))$$
$$G(x,g) = G(x, g(x))$$

$\Gamma_1 = \langle X, g(x), F(x,g), G(x,g) \rangle$ – нормальная форма.
Искать будем не ситуацию равновесия, а гарантированный выигрыш 1го игрока $W(x)$. Пуст 2ой игрок, зная *x*, выбирает *y* из множества наилучших ответов:

$$Y(x) = Arg \max_{y \in Y} G(x,y)$$

– непустое и является компактом, след. минимум достигается. $W(x) = \min_{y \in Y(x)} F(x,y)$ – гарантированный выигрыш 1го игрока при выборе стратегии *x*. Наилучший гарантированный результат имеет вид $F_1 = \sup_{x \in X} W(x) = \sup_{x \in X} \min_{y \in Y(x)} F(x,y)$.
Стратегия x^ε наз. ε – оптимальной, если $W(x^\varepsilon) \ge F_1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.
Решить иерархическую игру – найти F_1 и ε – оптимальную стратегию x^ε при заданном $\varepsilon > 0$.

Примеры:

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & -5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 7 & 7 & 3 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

$F_1 = \max_{1 \le i \le 3} \underbrace{\min_{j \in Y(i)} a_{ij}}_{W(i)}$, $Y(i) = Arg\max_{1 \le j \le 3} b_{ij}$

$Y(1) = \{1\}$, $Y(2) = \{1, 2\}$, $Y(3) = \{2, 3\}$

$W(1) = 3$, $W(2) = 3$, $W(3) = -5$

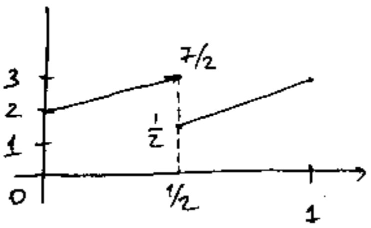
$i^0 = 1, 2$, $F_1 = 3$

2) Γ: $F(x,y) = 3x+2y$

$G(x,y) = (x-y)^2$, $X = Y = [0,1]$

$$Y(x) = \underset{0\le y\le 1}{Arg\max}\,(x-y)^2 = \begin{cases} \{1\}, & 0\le x<\frac{1}{2} \\ \{0,1\}, & x=\frac{1}{2} \\ \{0\}, & \frac{1}{2}<x\le 1 \end{cases}$$

$$W(x) = \min_{y\in Y(x)}(3x+2y) = \begin{cases} 3x+2, & 0\le x<\frac{1}{2} \\ 3/2, & x=\frac{1}{2} \\ 3x, & \frac{1}{2}<x\le 1 \end{cases}$$



$F_1 = 7/2$ не достиг.

$x^{\varepsilon} = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{3}$

$W(x^{\varepsilon}) = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{3}\right)+2 =$

$= \frac{7}{2} - \varepsilon$

Игра Γ_2

Игрок 1 перед выбором *x* имеет полную информацию об *y*. Он ходит первым и сообщает игроку 2 стратегию вида $f: Y \to X$. Множество всех таких стратегий – $\{f\}$. Схема сообщений в игре $\Gamma_2 : f \xrightarrow{2} y \xrightarrow{1} x = f(y)$.

Эконом.интерпр.: $f(y)$ – величина премии, обещ. центром за произведенную продукцию *y*.

Наилучший гарантированный результат F_2 игрока 1 в Γ_2: пусть 2ой игрок, зная *f*, выбирает *y* из множества $Y(f) = Arg\max_{y\in Y} G(f(y), y)$. $Y(f)$ м.б. пусто если *f* – разрывна, тогда будем считать, что 2ой может выбрать $\forall y \in Y$. Определим мн-во:

$$Y^*(f) = \begin{cases} Y(f), Y(f) \ne \varnothing \\ Y, Y(f) = \varnothing \end{cases}$$

Тогда 2ой игрок выбирает $y \in Y^*(f)$ и оценка эффективности стратегии *f* задается формулой: $W(f) = \inf_{y\in Y^*(f)} F(f(y), y)$ и наилучший гарантированный результат 1го игрока имеет вид:

$$F_2 = \sup_{f\in\{f\}} W(f) = \sup_{f\in\{f\}} \min_{y\in Y^*(f)} F(f(y), y)$$

Стратегия f^{ε} наз. ε – оптимальной, если $W(x^{\varepsilon}) \ge F_2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Поиск величины F_2 по указанной формуле весьма сложен, так как связан с решением оптимизационной задачи на множестве ф-ций $\{f\}$. Обычно ф-лу для F_2 упрощают чтобы искать по исходным множествам *X, Y*.

Игра Γ_3

Пусть игрок 2 играет против игрока 1 в игру Γ_2^*, т.е. сообщает ему стратегию $g: X \to Y$ (так называемую, функцию ответа). Игрок 1 в Γ_3 первым сообщает игроку 2 стратегию $f_1 : \{g\} \to X$. Схема сообщений в Γ_3: $f_1 \xrightarrow{2} g \xrightarrow{1} x = f_1(g) \xrightarrow{2} y = g(x)$.

Эконом.интерпр.: $f_1(g)$ – величина ресурса, который выделяет центр производителю продукции, когда тот сообщает ему свои произв. возможности (ф-цию g).

Наилучший гарантированный результат 1го игрока в Γ_3 :

$$F_3 = \sup_{f_1 \in \{f_1\}} \min_{g \in Y^*(f_1)} F(f_1(g), g),$$

где $Y^*(f_1) = \begin{cases} Y(f_1), Y(f_1) \neq \varnothing \\ \{g\}, Y(f_1) = \varnothing \end{cases}$, $Y(f_1) = Arg \max_{g \in \{g\}} G(f_1(g), g)$.

Вопрос 18. Теорема Гермейера о решении игры Γ_2.

Игра Γ_2. Первый игрок перед выбором x имеет полную информацию об y. Он ходит первый и сообщает второму игроку стратегию вида $f : Y \to X$. Множество всех таких стратегий обозначим через f. Схема сообщений в игре Γ_2: $f \xrightarrow{2} y \xrightarrow{1} x = f(y)$.

Экономическая интерпретация: $f(y)$ – величина премии, обещаемая центром за произведенную продукцию y.

Найдем выражение для наилучшего гарантированного результата F_2 первого игрока в игре Γ_2. Предположим, что второй игрок, зная f, выбирает y из множества $Y(x) = \underset{y\in Y}{Argmax}\, G(f(y), y)$. Множество $Y(f)$ может оказаться пустым, если функция f разрывна. В случае пустого $Y(f)$ будем считать, что второй игрок может выбрать любую стратегию $y \in Y$. Определим множество

$$Y^*(f) = \begin{cases} Y(f),\ Y(f) \neq \emptyset, \\ Y,\ Y(f) = \emptyset. \end{cases}$$

В сделанных предположениях второй игрок выбирает $y \in Y^*(f)$ и оценка эффективности стратегии f задается формулой

$$W(f) = \inf_{y\in Y^*(f)} F(f(y), y).$$

Наилучший гарантированный результат первого игрока имеет вид

$$F_2 = \sup_{f\in\{f\}} \inf_{y\in Y^*(f)} F(f(y), y).$$

Определение. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Стратегия f^ε называется ε-оптимальной в игре Γ_2, если $W(f^\varepsilon) \geq F_2 - \varepsilon$.

Поиск величины F_2 по указанной формуле весьма сложен, так как связан с решением оптимизационной задачи на множестве функций $\{f\}$.

Найдем более простую формулу для F_2. Положим $X(y) = \underset{x\in X}{Argmax}\, F(x, y)$ – множество наилучших ответов первого игрока, $X^*(y) = \underset{x\in X(y)}{Argmax}\, G(x, y)$ – множество наилучших ответов первого игрока, благожелательных по отношению ко второму. Определим стратегию первого игрока f^*: $f^*(y) \in X^*(y)\ \forall y \in Y$.

Лемма 1.
Функция $G^*(f^*(y), y)$ полунепрерывна сверху в любой точке $y^0 \in Y$, т.е. для любой последовательности $\{y^k\}$, сходящейся к y^0, выполнено неравенство

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, G(f^*(y^k), y^k) \leq G(f^*(y^0), y^0).$$

Доказательство.

Пусть в некоторой точке $y^0 \in Y$ функция $G(f^*(y), y)$ не является полунепрерывной сверху. Тогда найдется такая последовательность $\{y^k\}$,, сходящаяся к y^0, что

$$G' \overset{def}{=} \overline{\lim_{k\to\infty}}\, G(f^*(y^k), y^k) > G(f^*(y^0), y^0).$$

Без потери общности считаем (выделяя соответствующую подпоследовательность), что $f^*(y^k) \to x'$. Из непрерывности функции $G(x, y)$ следует

$$G' = \lim_{k\to\infty} G(f^*(y^k), y^k) = G(x', y^0).$$

Покажем, что $x' \in X(y^0)$. Действительно, по определению функции f^* имеем $F(f^*(y^k), y^k) \geq F(x, y^k)\ \forall x \in X,\ k = 1, 2, \ldots$ Отсюда, переходя в последнем неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим

$$F(x', y^0) \geq F(x, y^0)\ \forall x \in X \ \Rightarrow \ x' \in X(y^0).$$

Отсюда следует, что $G' = G(x', y^0) > G(f^*(y^0), y^0)$. Оно противоречит тому, что $f^*(y^0) \in X^*(y^0)$.

□

Нам потребуются следующие величины и множества:

$G_2 = \max\limits_{y \in Y} \min\limits_{x \in X} G(x, y)$ – наилучший гарантированный результат второго игрока при условии, что первый применяет по отношению к нему стратегию "наказания" f^H : $f^H(y) \in \underset{x \in X}{Argmin}\, G(x, y)\ \forall y \in Y$;

$E = \underset{y \in Y}{Argmax} \min\limits_{x \in X} G(x, y)$ – множество максиминных стратегий второго игрока;

$D = \left\{(x, y) \in X \times Y \middle| G(x, y) > G_2\right\}$;

$K = \begin{cases} \sup\limits_{(x,y) \in D} F(x, y),\ D \neq \emptyset, \\ -\infty, D = \emptyset; \end{cases}$

$M = \min\limits_{y \in E} \max\limits_{x \in X} F(x, y)$.

Теорема 1 (Гермейер).
В сделанных предположениях наилучший гарантированный результат первого игрока в игре Γ_2 равен $F_2 = \max[K, M]$.

Замечание. *Для нахождения F_2 необходимо решить оптимизационные задачи на исходных множествах X и Y. Оптимальные (ε-оптимальные) стратегии, обеспечивающие $\max[K, M]$, будут указаны в первой части доказательства теоремы. Результат $\max[K, M]$ довольно велик. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим частный случай. Допустим, что существует пара $(x^0, y^0) \in \underset{(x,y) \in X \times Y}{Argmax}\, F(x, y) \cap D$. Тогда*

$$K = \sup_{(x,y) \in D} F(x, y) = \max_{(x,y) \in X \times Y} F(x, y) = F_2,$$

т.е. результат F_2 равен максимуму функции $F(x, y)$ на $X \times Y$.

Доказательство.

Первая часть. Построим стратегии первого игрока, обеспечивающие ему результат $\max[K, M]$. Рассмотрим два случая.

1. $K > M \ \Rightarrow \ D \neq \emptyset$. Покажем, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такая стратегия f^ε, что $W(f^\varepsilon) \geq k - \varepsilon$. По определению верхней грани K найдется такая пара $(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \in D$, что $F(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \geq K - \varepsilon$. Положим

$$f^\varepsilon(y) = \begin{cases} x^\varepsilon,\ y = y^\varepsilon, \\ f^H(y), y \neq y^\varepsilon. \end{cases}$$

Покажем, что $W(f^\varepsilon) = F(x^\varepsilon, y^\varepsilon) \geq K - \varepsilon$. Действительно, второй игрок, получив сообщение о f^ε, выберет $y = y^\varepsilon$, так как в противном случае он получит выигрыш $G(f^H(y), y) = \min\limits_{x \in X} G(x, y) \leq G_2 < G(x^\varepsilon, y^\varepsilon)$. Поскольку второй игрок максимизирует свой выигрыш, он выберет $y = y^\varepsilon$, т.е. $Y^*(f^\varepsilon) = \{y^\varepsilon\}$.

2. $k \le M$. Укажем стратегию f^0 , для которой $W(f^0) \ge M$. Положим

$$f^0(y) = \begin{cases} f^*(y), & y \in E, \\ f^H(y), & y \notin E, \end{cases}$$

где стратегия f^* была определена выше перед леммой. Получив сообщение о f^0 , второй игрок выберет $y \in E$. Действительно, если $y \notin E$, то $G(f^H(y), y) = \min_{x \in X} G(x, y) < G_2$. Далее, при $y \in E$ $G(f^0(y), y) = G(f^*(y), y) \ge \min_{x \in X} G(x, y) = G_2$. Функция $G(f^*(y), y)$ полунепрерывна сверху на компакте E , поэтому $Y^*(f^0) = \underset{y \in E}{Argmax}\, G(f^*(y), y) \subseteq E$. Отсюда

$$W(f^0) = \min_{y \in Y^*(f^0)} F(f^*(y), y) \ge \min_{y \in E} F(f^*(y), y) = \min_{y \in E} \max_{x \in X} F(x, y) = M.$$

Вторая часть. Докажем, что для произвольной стратегии $f \in \{f\}$ $W(f) \le \max[K, M]$. Имеем

$$\sup_{y \in Y} G(f(y), y) \ge \max_{y \in Y} \min_{x \in X} G(x, y) = G_2.$$

Рассмотрим два случая.

1. $\sup_{y \in Y} G(f(y), y) > G_2$. В этом случае найдется такая стратегия второго игрока $y^0 \in Y^*(f)$, что $G(f(y^0), y^0) > G_2$, т.е. $(f(y^0), y^0) \in D$. Действительно, если $\sup_{y \in Y}$ достигается, то $Y(f) \ne \emptyset$ и y^0 возьмем реализующим $\sup_{y \in Y}$. Если $\sup_{y \in Y}$ не достигается, то $Y^*(f) = Y$ и стратегия y^0 найдется по определению $\sup_{y \in Y}$. Отсюда

$$W(f) = \inf_{y \in Y^*(f)} F(f(y), y) \le F(f(y^0), y^0) \le K \le \max[K, M].$$

2. $\sup_{y \in Y} G(f(y), y) = G_2$. Покажем, что $E \subset Y^*(f)$. Действительно, пусть $y \in E$. Тогда

$$G_2 = \min_{x \in X} G(x, y) \le G(f(y), y) \le \sup_{y \in Y} G(f(y), y) = G_2.$$

В этой цепочке неравенства выполнены как равенства. Отсюда $y \in Y^*(f)$ и $E \subseteq Y^*(f)$. Итак,

$$W(f) = \inf_{y \in Y^*(f)} F(f(y), y) \le \inf_{y \in E} F(f(y), y) \le \min_{y \in E} \max_{x \in X} F(x, y) = M \le \max[K, M].$$

□

Литература

1. А.А. Васин, В.В. Морозов "Введение в теорию игр с приложениями к экономике"(учебное пособие). – М.: 2003., стр.124-128.

Вопрос 19. Принцип уравнивания в задаче оптимального распределения ресурсов.

Пусть $i = 1, \dots, n$ – номера n пунктов, по которым оперирующая сторона распределяет ресурс. Через $f_i(t)$ обозначим функцию, определяющую эффект от вложения ресурса. При этом на i-й пункт направляется ресурс в количестве x_i.

Будем рассматривать два вида задач: непрерывные, где ресурс предполагается бесконечно-непрерывным, и дискретные, где ресурс – штучный, а A и x_i – целые числа. Для непрерывной задачи множество стратегий имеет вид

$$M_0 = \left\{ x \in E^n \Big| \sum_{i=1}^{n} x_i = A,\ x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, n \right\},$$

а для дискретной

$$M_0' = \left\{ x \in E^n \Big| \sum_{i=1}^{n} x_i = A,\ x_i \geq 0,\ x_i \in \mathbb{Z}\ i = 1, \dots, n \right\}.$$

Рассмотрим следующую непрерывную задачу

$$\max_{x \in M_0} \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i) = \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0). \tag{I}$$

По смыслу оперирующая сторона стремится максимизировать свертку вида $\min\limits_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i)$, т.е. минимальный эффект от вложения ресурса. Это отвечает социалистическому принципу: "чтобы не было бедных". Максиминную стратегию x_i^0 будем называть *оптимальным распределением ресурса.*

Задачу (I) будем рассматривать в предположении, что все функции $f_i(t)$ непрерывны и возрастают на отрезке $[0, A]$. Кроме того, без потери общности будем считать, что $f_1(0) \leq f_2(0) \leq \ldots \leq f_n(0)$. Будем условно говорить, что первый пункт является слабейшим: если пункт не выделяется ресурс, то эффект на первом пункте будет наименьшим.

Теорема 1 (принцип уравнивания Гермейера)**.**
В сделанных предположениях пусть x^0 – оптимальное распределние ресурса в задаче (I). Тогда для x^0 выполнено следующее необходимое и достаточное условие: найдется такое целое k, $1 \leq k \leq n$, что

$$\begin{cases} f_i(x_i^0) = f_k(x_k^0) < f_{k+1}(0),\ i = 1, \dots, k-1, \\ x_i^0 = 0,\ i = k+1, \dots, n. \end{cases} \tag{1}$$

Если $f_1(0) = f_2(0) = \ldots = f_n(0)$, то $k = n$. Во всех случаях оптимальное распределение ресурса x^0 единственно.

Доказательство.

Необходимость. Заметим, что оптимальное управление x^0 существует, поскольку функция $\min\limits_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i)$ непрерывна на компакте M_0. Определим число k из условия

$$f_k(0) \leq \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i) < f_{k+1}(0). \tag{2}$$

Если $k = n$, то второе неравенство в (2) отсутствует. Нетрудно видеть, что указанное k всегда найдется. Действительно, в силу монотонности функций $f_i(t)$ справедливо неравенство $f_1(0) \leq \min\limits_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0)$.

Поэтому число $\min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i^0)$ принадлежит одному из полуинтервалов $[f_i(0), f_{i+1}(0))$, $i = 1,\ldots,n.$ Здесь при $f_i(0) = f_{i+1}(0)$ соответствующий интервал пуст, а $f_{n+1}(0)$ полагается равным ∞.

Пусть $k < n$. Покажем, что $x_i^0 = 0$, $i = k+1,\ldots,n$. Предположим, что при некотором $i_1 \ge k+1$ $x_{i_1}^0 > 0$. Определим следующий вектор z:

$$z_i = \begin{cases} x_{i_1}^0 - \varepsilon,\ i = i_1, \\ x_{i_1}^0 + \frac{\varepsilon}{n-1},\ i \ne i_1,\ \varepsilon > 0. \end{cases}$$

При малом $\varepsilon > 0$ вектор $z \in M_0$. Действительно, его компоненты при $\varepsilon \in (0, x_{i_1}^0)$ положительны, а их сумма равна A.

Используя монотонность функций $f_i(t)$, получим, что при $i \ne i_1$

$$f_i(z_i) > f_i(x_i^0) \ge \min_{1\le i\le n} f_i(x_i^0),$$

а при $i = i_1$

$$f_{i_1}(z_{i_1}) > f_{i_1}(0) \ge f_{k+1}(0) \underset{2}{>} \min_{1\le i\le n} f_i(x_i^0).$$

Отсюда $\min\limits_{1\le i\le n} f_i(z) > \min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i^0)$, что противоречит оптимальности x^0.

Докажем, что $f_i(x_i^0) = \min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i^0)$ при $i = 1,\ldots k$. Предположим противное. Тогда найдется такой номер $i_1 \le k$, что $f_{i_1}(x_{i_1}^0) > \min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i^0)$. Покажем, что $x_{i_1}^0 > 0$. Действительно, в противном случае $\min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i^0) < f_{i_1}^0 \le f_k(0)$, что противоречит 2.

Итак, $x_{i_1}^0 > 0$. Возьмем определенное выше распределение z. Как и раньше, при $i \ne i_1$ выполнено неравенство $f_i(z_i) > \min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i^0)$, а неравенство $f_{i_1}(z_{i_1}) = f_{i_1}(x_{i_1}^0 - \varepsilon) > \min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i^0)$ будет выполнено при малом $\varepsilon > 0$, поскольку функции $f_i(t)$ непрерывны. Отсюда, как и выше получаем противоречие. Условие 1 доказано.

Достаточность. Пусть стратегия $x^0 \in M_0$ удовлетворяет условию 1. Покажем, что x^0 – оптимальное распределение ресурса. Возьмем произвольную стратегию $x \in M_0$, отличную от x^0. Поскольку суммы компонент этих векторов равны A, существует такой номер j, что $x_j < x_j^0$. Отсюда следует, что $x_j^0 > 0$. Поэтому $\min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i) \le f_j(x_j) < f_j(x_j^0) = \min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i^0)$, т.е. x^0 – оптимальное распределение ресурса. Единственность оптимального распределения x^0 следует из последнего строго равенства.

□

Рассмотрим алгоритм поиска оптимального распределения ресурса. Берем последовательно $k = n, n-1, \ldots, 1$ и решаем систему уравнений

$$f_i(x_i^0) = C,\ i = 1,\ldots,k,\ x_i^0 = 0,\ i = k+1,\ldots,n,\ \sum_{i=1}^n x_i^0 = A \tag{3}$$

относительно неизвестных $C, x_1^0, \ldots, x_n^0$. Если полученное решение имеет неотрицательные компоненты x_i^0 и при $k < n$ выполнено неравенство $C < f_{k+1}(0)$, то x^0 – оптимальное распределение ресурса. В противном случае уменьшаем значение k и вновь решаем задачу.

Часто встречается оптимизационная задача вида

$$\min_{x\in M_0} \max_{1\le i\le n} f_i(x_i) = \max_{1\le i\le n} f_i(x_i^0).$$

Здесь предполагается, что каждая функция $f_i(t)$ убывает, ее значение можно интерпретировать как величину ущерба при вложении ресурса в количестве t.

Перейдем теперь к задаче дискретного максимина:

$$\max_{x\in M_0'}\min_{1\le i\le n} f_i(x_i)=\min_{1\le i\le n} f_i(x_i^*). \qquad (I')$$

Здесь $f_i(t)$ – возрастающие функции целого аргумента.

Положим $I=\{1,\dots,n\}$ и для $x\in M_0'$ определим множество $I(x)=Arg\min_{i\in I} f_i(x)$.

Обозначим через $|I(x)|$ число элементов множества $I(x)$.

Теорема 2.
Пусть x^* – такое оптимальное распределение ресурсов задачи (I'), при котором величина $|I(x^*)|$ минимальна среди всех оптимальных распределений. Тогда необходимо выполнено условие:

$$\text{если } x_j^*>0,\ \text{то } \min_{1\le i\le n} f_i(x_i^*)\ge f_j(x_j^*-1). \qquad (4)$$

Условие 4 является достаточным условием оптимальности. **Замечание.** *Условие 4 показывает, что при положительной компоненте x_j^* величина $f_j(x_j^*)$ близка к $\min_{1\le i\le n} f_i(x_i^*)$. Это дискретный аналог принципа уравнивания.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть x^* – указанное в условии теоремы оптимальное распределение ресурса задачи (I'). Предположим, что условие 4 не выполнено. Тогда найдется такой номер j, что $x_j^*>0$ и $f_j(x_j^*-1)>\min_{1\le i\le n} f_i(x_i^*)$. Отсюда следует, что $j\notin I(x^*)$. Возьмем номер $l\in I(x^*)$ и определим новое распределение $z\in M_0'$:

$$z_i=\begin{cases} x_j^*-1,\ i=j,\\ x_l^*+1,\ i=l,\\ x_i^*,\ i\ne j,l.\end{cases}$$

Тогда $f_l(z_l)>f_l(x_l^*)$, $f_j(z_j)>\min_{1\le i\le n} f_i(x_i^*)$. Отсюда следует, что $\min_{1\le i\le n} f_i(z_i)>\min_{1\le i\le n} f_i(x_i^*)\ \Rightarrow\ \min_{1\le i\le n} f_i(z_i)=\min_{1\le i\le n} f_i(x_i^*)$, так как x^* – оптимальное распределение ресурса. Итак, распределение z также оптимально. При этом $I(z)=I(x^*)\backslash\{l\}$, что противоречит определению x^*.

Достаточность. Пусть выполнено условие (3). Возьмем произвольное $x\in M_0',\ x\ne x^*$. Тогда найдется такой номер j, что $x_j^*>x_j$. Отсюда $x_j^*>0$ и

$$\min_{1\le i\le n} f_i(x_i^*)\overset{(4)}{\ge} f_j(x_j^*-1)\ge f_j(x_j)\ge\min_{1\le i\le n} f_i(x_i).$$

Итак, x^* – оптимальное распределение ресурса.

□

Рассмотрим алгоритм поиска оптимального распределения задачи (I'). Пусть $x^{(1)}$ – произвольное распределение ресурса. Допустим, что алгоритм проработал до k-го шага и мы получили распределение $x^{(k)}$. Если для $x^{(k)}$ выполнено условие (4), то по теореме 2 оно будет искомым и оптимальным распределением. Допустим, что для $x^{(k)}$ условие (4) не выполнено. Тогда найдется такой номер j, что $x_j^{(k)}>0$ и $f_j(x_j^*-1)>\min_{1\le i\le n} f_j(x_j^*)$. Определим новое распределение $x^{(k+1)}=z$, как это сделано в доказательстве теоремы 2. При этом нужно заменить x^* на $x^{(k)}$. Могут возникнуть два случая:

1. $I(x^{(k)}) = \{l\}$. Тогда
$$\min_{1\le i\le n} f_i(x_i^{(k+1)}) > \min_{1\le i\le n} f_i(x_i^{(k)}).$$

2. $|I(x^{(k)})| > 1$. Тогда
$$\min_{1\le i\le n} f_i(x_i^{(k+1)}) = \min_{1\le i\le n} f_i(x_i^{(k)}),\ \text{но } |I(x^{(k+1)})| < |I(x^{(k)})|.$$

Таким образом, на каждом шаге алгоритма либо увеличивается значение функции минимума, либо сокращается множество $I(x^{(k)})$. Отсюда следует, что алгоритм закончит свою работу через конечное число шагов, поскольку множество M_0' содержит конечное число элементов.

Литература

1. Какая-то pdf-ка, называется "Глава III. Теория принятия решений."

Элементы выпуклого анализа

Напомним определение выпуклой функции.

Определение. Функция $J(u)$ называется *выпуклой* на выпуклом множестве $\mathbf{U}$, если

$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) \leqslant \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v) \quad \forall u, v \in \mathbf{U}, \forall \alpha \in [0,1].$$

И введём несколько новых понятий:

Определение. Функция $J(u)$ называется *строго выпуклой*, если

$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) < \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v) \quad \forall u, v \in \mathbf{U}, u \neq v, \forall \alpha \in (0,1).$$

Определение. Функция $J(u)$ называется *сильно выпуклой* с коэффициентом $\kappa > 0$, если

$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) \leqslant \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v) - \frac{\kappa}{2}\alpha(1-\alpha)\|u-v\|^2 \quad \forall u, v \in \mathbf{U}, \forall \alpha \in [0,1].$$

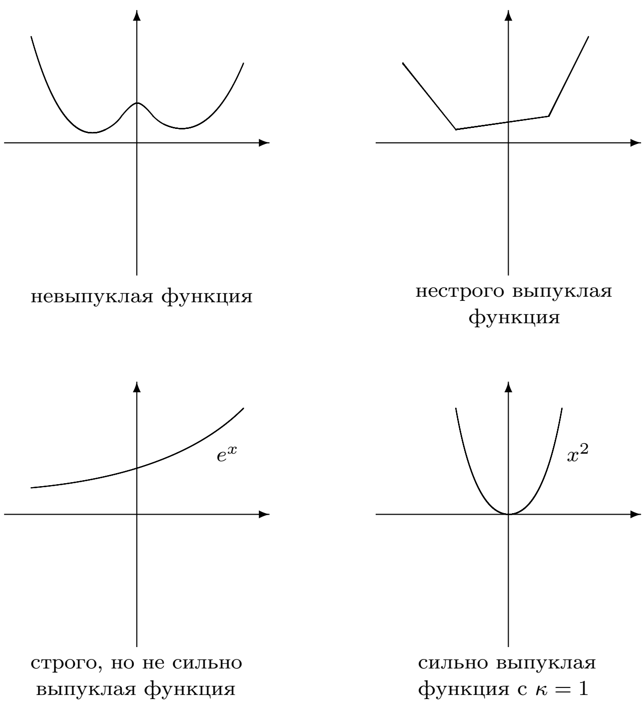


Рис. 5: к определению выпуклости функции

Теорема 5. ***(о локальном минимуме выпуклой функции)***
Пусть множество $\mathbf{U}$ выпуклое, функция $J(u)$ выпукла на $\mathbf{U}$, $J_* > -\infty$ тогда:

1) *любая точка локального минимума $J(u)$ на $\mathbf{U}$ является точкой глобального минимума;*

2) *если $\mathbf{U}_* \neq \varnothing$, то $\mathbf{U}_*$ выпукло;*

3) если $\mathbf{U}_* \neq \varnothing$, а $J(u)$ строго выпукла, то $\mathbf{U}_* = \{u_*\}$ (состоит из одного элемента).

Доказательство.

Пусть точка $u_* \in \mathbf{U}$ - точка локального минимума, т.е.

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall u \in \mathbf{U} \cap \{\|u - u_*\| \leqslant \varepsilon\} \Rightarrow J(u) \geqslant J(u_*).$$

Фиксируем любую точку $v \in \mathbf{U}$, тогда существует такое $\alpha_0, 0 < \alpha_0 < 1$, что для любого α из отрезка $[0, \alpha_0]$ выполнено условие

$$u_* + \alpha(v - u_*) \in \mathbf{U} \cap \{\|u - u_*\| \leqslant \varepsilon\}.$$

Имеем:

$$J(u_*) \leqslant J(u_* + \alpha(v - u_*)) \leqslant \{\text{опр. выпуклой функции}\} \leqslant (1 - \alpha)J(u_*) + \alpha J(v).$$

Отсюда следует, что $\alpha J(u_*) \leqslant \alpha J(v)$, причём $\alpha > 0$, таким образом доказано первое утверждение теоремы.

Доказательство второго утверждения теоремы предоставляется читателю.

Для доказательства третьего утверждения, предположим, что в $\mathbf{U}_*$ существует элемент $v_* \neq u_*$, тогда для любого α из интервала $(0, 1)$ будем иметь:

$$J_* = J(\underbrace{\alpha u_* + (1 - \alpha)v_*}_{\in \mathbf{U}_* (\text{по п.2})}) < \{\text{т.к. } J \text{ строго выпукла}\} <$$

$$< \alpha J(u_*) + (1 - \alpha)J(v_*) = \{v_*, u_* \in \mathbf{U}\} = J(v_*) = J_*.$$

Получили противоречие и теорема полностью доказана. □

Теорема 6. ***(сильно выпуклый вариант теоремы Вейерштрасса)***
Пусть $\mathbb{H}$ - гильбертово пространство, множество $\mathbf{U} \subset \mathbb{H}$ выпукло и замкнуто (не обязательно ограничено!), функция $J(u)$ сильно выпукла с коэффициентом $\varkappa$ и полунепрерывна снизу на $\mathbf{U}$ (т.е. и слабо полунепрерывна снизу) тогда:

1) $J_* > -\infty$;

2) $\mathbf{U}_* = \{u_*\} \neq \varnothing$;

3) $\forall u \in \mathbf{U}$ $\frac{\varkappa}{2}\|u - u_*\|^2_{\mathbb{H}} \leqslant J(u) - J(u_*)$.

Доказательство.

Зафиксируем любую точку u_0 из $\mathbf{U}$ и рассмотрим множество $\mathbf{M}(u_0) = \{u \in \mathbf{U} | J(u) \leqslant J(u_0)\}$. Докажем, что $\mathbf{M}(u_0)$ выпукло, замкнуто и ограничено.

Выпуклость следует из выпуклости $\mathbf{U}$ и $J(u)$.

Для доказательства замкнутости рассмотрим любую последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbf{M}(u_0)$, сходящуюся к некоторой точке u. Необходимо доказать, что точка u принадлежит множеству $\mathbf{M}(u_0)$. Так как $\mathbf{U}$ замкнуто, то точка $u \in \mathbf{U}$, и

$$J(u) \leqslant \{J \text{ п.н. снизу}\} \leqslant \varliminf_{k \to \infty} J(u_k) \leqslant \{J(u_k) \leqslant J(u_0) \forall k\} \leqslant J(u_0).$$

Таким образом замкнутость доказана.

Теперь докажем, что $\mathbf{M}(u_0)$ ограничено. Для этого разобьём это множество на два (см. рис. 6):

$$\mathbf{M}(u_0) = (\underbrace{\mathbf{M}(u_0) \cap \{\|u - u_0\| \leqslant 2\}}_{\mathbf{M}_1}) \cup (\underbrace{\mathbf{M}(u_0) \setminus \mathbf{M}_1}_{\mathbf{M}_2}).$$

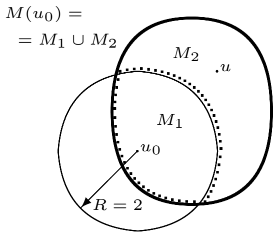


Рис. 6: множество $\mathbf{M}$

Множество $\mathbf{M}_1$ ограничено (по построению), то есть нам необходимо доказать ограниченность множества $\mathbf{M}_2$.

Для любой точки u из $\mathbf{M}_2$ $u \in \mathbf{U}$, $J(u) \leqslant J(u_0)$, $\|u - u_0\| > 2$. Возьмём $\alpha = \frac{1}{\|u-u_0\|} \in (0, \frac{1}{2})$, $1 - \alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$, тогда для точки $v = u_0 + \underbrace{\alpha(u - u_0)}_{\|\cdot\|=1<2} \in \mathbf{M}_1$ выполняется неравенство

$$J(v) \leqslant \{J(u) \text{ сильно выпукла}\} \leqslant (1-\alpha)J(u_0) + \alpha J(u) - \frac{\kappa}{2}\alpha(1-\alpha)\|u - u_0\|^2.$$

Отсюда, перегруппировав слагаемые и учтя ограничения на α, получаем, что $\frac{\kappa}{4}\|u - u_0\| \leqslant J(u_0) - J(v)$. Но $v \in \mathbf{M}_1$, а для этого множества (так как оно выпукло, замкнуто и ограничено) выполнена Теорема 2: $J_{1*} = \inf\limits_{u \in \mathbf{M}_1} J(u) > -\infty$ — и мы имеем $\|u - u_0\| \leqslant \frac{4(J(u_0) - J_{1*})}{\kappa}$.

Таким образом множество $\mathbf{M}_2$ (а значит и всё множество $\mathbf{M}$) ограничено и первое утверждение теоремы полностью доказано.

Второе утверждение теоремы следует непосредственно из Теоремы 5.

Докажем третье утверждение. Имеем

$$J(u_*) \leqslant J(\underbrace{u_* + \alpha(u - u_*)}_{\in \mathbf{U}}) \leqslant \{J(u) \text{ сильно выпукла}\} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha J(u) + (1-\alpha)J(u_*) - \frac{\kappa}{2}\alpha(1-\alpha)\|u - u_*\|^2$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\kappa}{2}\alpha(1-\alpha)\|u - u_*\|^2 \leqslant \alpha J(u) + (1-\alpha)J(u_*) - J(u_*) = \alpha[J(u) - J(u_*)]$$

то есть, $\frac{\kappa}{2}(1-\alpha)\|u - u_*\|^2 \leqslant J(u) - J(u_*)$. Устремляя α к нулю, получаем третье утверждение. $\square$

Теорема 7. ***(критерий выпуклости для дифференцируемых функций)***
Пусть $\mathbb{H}$ *- гильбертово пространство, множество* $\mathbf{U} \subset \mathbb{H}$ *выпукло,* $J(u) \in \mathbf{C}^1(\mathbf{U})$*. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a) $J(u)$ *выпукла;*

(b) $J(u) \geqslant J(v) + \langle J'(v), u - v\rangle_{\mathbb{H}} \quad \forall u, v \in \mathbf{U}$*;*

(c) $\langle J'(u) - J'(v), u - v\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant 0 \quad \forall u, v \in \mathbf{U}$*.*

Если, кроме того, $J(u) \in \mathbf{C}^2(\mathbf{U})$ *и* $\mathrm{int}\mathbf{U} \neq \varnothing$*, то эквивалентны утверждения* $(a)-(c)$ *и утверждение*

(d) $\langle J''(u)\cdot h, h\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathbf{U}, \forall h \in \mathbb{H}$*.*

Доказательство.

Для начала проведём цепочку доказательств по следующей схеме $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$.

1) $(a) \Rightarrow (b)$

По определению выпуклой функции:

$$J(\alpha u + (1-\alpha)v) \leqslant \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v).$$

Перегруппируем слагаемые и получим:

$$\alpha J(u) \geqslant \alpha J(v) + [J(v + \alpha(u - v)) - J(v)].$$

Применим к выражению в квадратных скобках формулу конечных приращений:

$$\alpha J(u) \geqslant \alpha J(v) + \langle J'(v + \theta\alpha(u - v)), \alpha(u - v)\rangle_{\mathbb{H}}\,,\ \theta \in [0, 1].$$

Теперь разделим обе части неравенства на $\alpha > 0$ и устремим α к нулю. Так как $J'(u)$ непрерывна по условию, мы получим, что для любых $u, v \in \mathbf{U}$:

$$J(u) \geqslant J(v) + \langle J'(v), u - v\rangle_{\mathbb{H}}\,,$$

т.е. утверждение (b).

2) $(b) \Rightarrow (c)$

Запишем условие (b) для любых двух точек $u, v \in \mathbf{U}$:

$$J(u) \geqslant J(v) + \langle J'(v), u - v\rangle_{\mathbb{H}}$$

$$J(v) \geqslant J(u) + \langle J'(u), v - u\rangle_{\mathbb{H}}\,,$$

и сложим два этих неравенства:

$$J(u) + J(v) \geqslant J(v) + J(u) + \langle J'(v) - J'(u), u - v\rangle_{\mathbb{H}}$$

Отсюда непосредственно следует утверждение (c).

3) $(c) \Rightarrow (a)$

Обозначим через w выражение $\alpha u + (1-\alpha)v$. Тогда:

$$\alpha J(u)+(1-\alpha)J(v)-J(\alpha u+(1-\alpha)v) = \alpha J(u)+(1-\alpha)J(v)-[\alpha J(w)+(1-\alpha)J(w)] =$$

$$= \alpha(J(u)-J(w)) + (1-\alpha)(J(v)-J(w)) = \{\text{формула конечных приращений}\} =$$

$$= \alpha \int\limits_0^1 \langle J'(w+t(u-w)), u-w\rangle_{\mathbb{H}}\, dt + (1-\alpha)\int\limits_0^1 \langle J'(w+t(v-w)), v-w\rangle_{\mathbb{H}}\, dt.$$

Заметим, что $u-w=(1-\alpha)(u-v)$, $v-w=\alpha(v-u)$ и, продолжая цепочку равенств, получим, что предыдущее выражение равно

$$\alpha(1-\alpha)\int\limits_0^1 \langle J'(w+t(u-w)) - J'(w+t(v-w)), u-v\rangle_{\mathbb{H}}\, dt.$$

Если обозначить через x выражение $w+t(u-w)$, а через y выражение $w+t(v-w)$, то $u-v$ будет равняться $(x-y)/t$, где $t>0$. Тогда в этих обозначениях предыдущий интеграл равен

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{t}\langle J'(x)-J'(y), x-y\rangle_{\mathbb{H}}\, dt \geqslant 0.$$

Таким образом импликация $(c) \Rightarrow (a)$ доказана.

Докажем теперь, что из утверждения (c) с дополнительными ограничениями следует утверждение (d).

Фиксируем любое $u \in \mathrm{int}\mathbf{U}$ и любое $h \in \mathbb{H}$. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ точка $u+\varepsilon h \in \mathbf{U}$. Имеем

$$\langle J'(u+\varepsilon h) - J'(u), \varepsilon h\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant 0.$$

Применим к первому аргументу скалярного произведения формулу конечных приращений (здесь учитывается, что $J(u) \in \mathbf{C}^2(\mathbf{U})$):

$$\langle J''(u+\theta\varepsilon h)\varepsilon h, \varepsilon h\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant 0 \quad \theta=\theta(\varepsilon)\in[0,1].$$

Разделим это неравенство на ε^2 и устремим ε к нулю. Тогда, учтя, что $J''(u)$ непрерывна, получим, что утверждение (d) выполнено для всех $u \in \mathrm{int}\mathbf{U}$.

Теперь применим свойство *выпуклых* множеств: $\overline{\mathrm{int}\mathbf{U}} = \mathrm{int}\overline{\mathbf{U}}$ (здесь оно приводится без доказательства, см., например, [АТФ, стр.216-217]). Имеем, что (d) выполняется для всех $u \in \mathbf{U}\cap\overline{\mathrm{int}\mathbf{U}} = \mathbf{U}\cap\overline{\mathbf{U}} = \mathbf{U}$.

Для завершение доказательства теоремы докажем, что выполнение условия (d) влечёт за собой (c), а это следует из того, что

$$\langle J'(u)-J'(v), u-v\rangle_{\mathbb{H}} = \{\text{Упражнение 6}\} = \langle J''(v+\theta(u-v))(u-v), u-v\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant 0.$$

Таким образом теорема полностью доказана. $\square$

Аналогичным образом можно доказать подобную теорему для случая сильной выпуклости. Приведём её формулировку.

Теорема 8. ***(критерий сильной выпуклости для дифференцируемых функций)***
Пусть $\mathbb{H}$ *- гильбертово пространство, множество* $\mathbf{U} \subset \mathbb{H}$ *выпукло,* $J(u) \in \mathbf{C}^1(\mathbf{U})$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a') $J(u)$ *сильно выпукла с коэффициентом* $\kappa > 0$*;*

(b') $J(u) \geqslant J(v) + \langle J'(v), u - v\rangle_{\mathbb{H}} + \frac{\kappa}{2}\|u - v\|^2_{\mathbb{H}} \quad \forall u, v \in \mathbf{U}$*;*

(c') $\langle J'(u) - J'(v), u - v\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant \kappa\|u - v\|^2_{\mathbb{H}} \quad \forall u, v \in \mathbf{U}$.

Если, кроме того, $J(u) \in \mathbf{C}^2(\mathbf{U})$ *и* $\mathrm{int}\mathbf{U} \neq \varnothing$*, то эквивалентны утверждения* (a') – (c') *и утверждение*

(d') $\langle J''(u){\cdot}h, h\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant \kappa\|h\|^2_{\mathbb{H}} \quad \forall u \in \mathbf{U}, \forall h \in \mathbb{H}$.

Доказательство.
По сути, необходимо повторить доказательство Теоремы 7, учитывая сильную выпуклость. Предоставим это читателю. □

Приведём пример, показывающий, что условие $\mathrm{int}\mathbf{U} \neq \varnothing$ в пунктах (d) и (d') Теорем 7 и 8 важно.

Рассмотрим множество $\mathbf{U} = \{y = 0\}$ в пространстве $\mathbb{R}^2$ ($u = (x, y)$, $\mathbf{U}$ - выпукло, $\mathrm{int}\mathbf{U} = \varnothing$) и функцию $J(u) = x^2 - y^2$. $J(u) \in \mathbf{C}^2$ и сильно выпукла, однако очевидно, что её вторая производная

$$J''(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

не удовлетворяет ни условию (d), ни условию (d').

Примеры применения Теорем 7 и 8.

1) $J(u) = \langle c, u\rangle$ - линейная функция, выпуклая, но не сильно. $J''(u) = 0$, т.е. неравенство (d) выполняется, но при этом неравенство (d') не выполняется.

2) $J(u) = \|Au - f\|^2_{\mathbf{F}}, \quad A \in \mathbf{L}(\mathbb{H} \to \mathbf{F}), f \in \mathbf{F}$ - квадратичный функционал, как известно выпуклый (доказано выше). Докажем это по-другому — применяя Теорему 7.

$$J''(u) = 2A^*Au \in \mathbf{L}(\mathbb{H} \to \mathbb{H})$$

$$\langle J''(u)h, h\rangle_{\mathbb{H}} = \langle 2A^*Ah, h\rangle_{\mathbb{H}} = 2\|Ah\|^2_{\mathbf{F}} \geqslant 0 \quad \forall h \in \mathbb{H}.$$

Т.е. условие (d) выполняется.

В то же время $J(u)$ - сильно выпуклый с коэффициентом $\kappa > 0$ тогда и только тогда, когда

$$2\,\langle A^*Ah, h\rangle_{\mathbb{H}} \geqslant \kappa\|h\|^2_{\mathbb{H}} \quad \forall h \in \mathbb{H}.$$

На алгебраическом языке это означает существование обратного оператора

$$(A^*A)^{-1} \in \mathbf{L}(\mathbb{H} \to \mathbb{H}).$$

То есть, если $\det(A^*A) \neq 0$, то сильная выпуклость есть, а в противном случае сильной выпуклости нет.

Докажем теперь одну из основных теорем курса.

Теорема 9. ***(условия оптимальности в форме вариационного неравенства)*** *Пусть множество* $\mathbf{U}$ *- выпукло,* $J(u) \in \mathbf{C}^1(\mathbf{U})$. *Тогда*

1) если $u_* = \underset{u \in \mathbf{U}}{\operatorname{argmin}}\, J(u)$, *то* $\langle J'(u_*), u - u_* \rangle \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathbf{U} \quad (1)$;

2) если $u_* \in \operatorname{int}\mathbf{U}$, *то* $J'(u_*) = 0$;

3) если выполняется (1), *а* $J(u)$ *выпукла, то* $u_* = \underset{u \in \mathbf{U}}{\operatorname{argmin}}\, J(u)$.

Доказательство.

1) Так как $\mathbf{U}$ выпукло, то для любой точки u из $\mathbf{U}$ найдётся такое число $\alpha_0 \in [0,1]$, что для любого $\alpha \in [0, \alpha_0]$ точка $u_* + \alpha(u - u_*)$ будет принадлежать $\mathbf{U}$. Для этой точки по условию выполнено неравенство:

$$J(u_* + \alpha(u - u_*)) - J(u_*) \geqslant 0.$$

Применяя формулу конечных приращений, получаем:

$$\langle J'(u_* + \theta\alpha(u - u_*), \alpha(u - u_*)\rangle \geqslant 0.$$

Разделим это неравенство на α и устремим α к нулю. Тогда в силу непрерывности $J'(u)$ получаем первое утверждение утверждение теоремы.

2) Для достаточно малых $\alpha > 0$ точка $u_a = u_* - \alpha J'(u_*)$ принадлежит $\mathbf{U}$. Подставим точку u_a в (1) и получим:

$$\langle J'(u_*), -\alpha J'(u_*)\rangle \geqslant 0,$$

то есть $\|J'(u_*)\|^2 \leqslant 0$, а это означает, что $J'(u_*) = 0$.

3) Последнее утверждение теоремы следует из пункта (b) Теоремы 7:

$$J(u) - J(u_*) \geqslant \langle J'(u_*), u - u_*\rangle \geqslant 0.$$

Теорема доказана. $\square$

Примеры применения Теоремы 9.

1) Рассмотрим следующую тривиальную задачу минимизации на пространстве $\mathbb{H} = \mathbb{R}^1$:

$$J(u) = u^2 \to \inf, \quad u = x, \quad \mathbf{U} = [1, 2].$$

Очевидно, что $u_* = 1$. Получим этот результат с помощью (1). Для нашего случая скалярное произведение есть просто "естественное" умножение, поэтому необходимым условием оптимальности вследствие (1) является неравенство $2u_*(u - u_*) \geqslant 0$, которое должно выполняться для любого u из отрезка $[1, 2]$. Так как u_* может быть только из $[1, 2]$, то необходимо должно выполняться $u - u_* \geqslant 0$ опять же для любого u из отрезка $[1, 2]$. Отсюда получаем, что $u_* = 1$.

2) Решим следующую задачу оптимального управления в пространстве $\mathbf{L}^2(0, 4)$:

$$J(u) = \int_0^4 \big(x(t) + u^2(t)\big)\ dt \to \inf_{\mathbf{U}}, \quad \mathbf{U} = \{u \in \mathbf{L}^2(0,4) \mid |u(t)| \leqslant 1 \text{ почти всюду}\},$$

$$\begin{cases} x'(t) = u(t), \quad 0 < t < 4 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Для начала заметим, что множество $\mathbf{U}$ выпукло замкнуто и ограничено и, следовательно, является слабым компактом в $\mathbf{L}^2(0, 4)$.

Разобьём функционал $J(u)$ на два интеграла:

$$J(u) = \int_0^4 x(t)\, dt + \int_0^4 u^2(t)\, dt \equiv J_1(u) + J_2(u)$$

Функция $J_1(u)$ выпукла как линейная по u. Функция $J_2(u) = \|u\|^2_{\mathbf{L}^2(0,2)}$ сильно выпукла с коэффициентом $\varkappa = 2$. Отсюда получаем, что $J(u)$ является сильно выпуклым и по Теореме 6 существует единственно оптимальное управление.

Воспользуемся необходимым условием (1) для нахождения оптимального управления.

$$\langle J'(u_*), u - u_* \rangle_{\mathbf{L}^2} \geq 0 \quad \forall u \in \mathbf{U} \tag{$*$}$$

$J'(u_*)$ в наших обозначениях представимо как $J_1'(u_*) + J_2'(u_*)$, при этом $J_2'(u_*) = 2u_*$. Если бы мы представили $J_1(u)$ в каноническом виде $J_1 = \langle c, u \rangle$ (виде Рисса), то $J_1'(u) = c$.

$$J_1(u) = \int_0^4 x(t, u)\, dt = \int_0^4 c(t) u(t)\, dt = \int_0^4 x(t) \cdot 1\, dt = \int_0^4 x(t)(t-4)'\, dt =$$

$$= \{\text{инт. по частям}\} = -\int_0^4 x'(t)(t-4)\, dt = \int_0^4 u(t)(t-4)\, dt.$$

Таким образом, получаем, что $J_1'(t) = c(t) = 4-t$. Тогда условие $(*)$ переписывается в виде

$$\int_0^4 ((4-t) + 2u_*(t)) \cdot (u(t) - u_*(t))\ dt \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathbf{U}.$$

Воспользуемся тем, что это неравенство должно выполняться для любых u из $\mathbf{U}$ и рассмотрим следующее семейство функций, принадлежащих $\mathbf{U}$:

$$u(t) = \begin{cases} u_*(t), \quad t \in [0,4] \backslash (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \\ v, \quad t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \end{cases}$$

где v любое число из отрезка $[-1,1]$, $\varepsilon > 0$

Таким образом мы заменили оптимальное управление функцией, отличной от оптимальной, лишь на интервале $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, на котором она принимается равной допустимой константе. Этот метод называют методом *игольчатых вариаций*.

Тогда для любого положительного ε и любого $v \in [-1,1]$ условие $(*)$ переписывается в виде

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} ((4-t) + 2u_*(t)) \cdot (u(t) - u_*(t))\ dt \geqslant 0$$

Теперь воспользуемся теоремой о дифференцируемости интеграла Лебега (см., например, [КФ, гл.VI, §6]). Разделим полученное неравенство на 2ε и устремим ε к 0. Для почти всех t_0 из интервала $(0,4)$ получим $(4 - t_0 + 2u_*(t_0)) \cdot (v - u_*(t_0)) \geqslant 0$.

Возможны несколько вариантов.

i) Предположим, что $4 - t_0 + 2u_*(t_0) > 0$. Так как $u_*(t_0) \in [-1,1]$, то при t_0 из интервала $[0,2)$ это неравенство будет выполнено. Тогда необходимо должно выполняться условие $v - u_* \geqslant 0 \Leftrightarrow v \geqslant u_*$ для любого $v \in [-1,1]$. Отсюда при $t_0 \in [0,2)$ оптимальным является управление $u_*(t) \equiv -1$.

ii) Если $4 - t_0 + 2u_*(t_0) < 0$, то $v - u_*(t) \leqslant 0 \quad \forall v \in [-1,1]$ и мы получаем $u_*(t) \equiv 1$, но это противоречит тому, что $4 - t_0 + 2u_*(t_0) < 0$. Значит этот вариант исключён.

iii) Осталось рассмотреть случай, когда $4 - t_0 + 2u_*(t_0) \equiv 0$. Тогда получаем, что при $t_0 \in [0,2)$ $u_*(t) = \frac{t-4}{2}$.

Задача полностью решена.

Задачи линейного программирования

В этом пункте мы рассмотрим задачу минимизации функционала $J(u) = \langle c, u\rangle$ в гильбертовом пространстве $\mathbb{H} = \mathbb{R}^n$, где c фиксировано из $\mathbb{R}^n$.

Общая задача линейного программирования рассматривается на множестве

$$\mathbf{U} = \{u \in \mathbb{R}^n |\, \langle a_i, u\rangle = b_i, \langle \overline{a_i}, u\rangle \leqslant \overline{b_j}, \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, s}\} \tag{1}$$

Если ввести ряд обозначений:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a_1} \\ \overline{a_2} \\ \dots \\ \overline{a_m} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} \overline{b_1} \\ \overline{b_2} \\ \dots \\ \overline{b_m} \end{pmatrix},$$

то множество $\mathbf{U}$ можно описать в более компактной матричной форме:

$$\mathbf{U} = \{u \in \mathbb{R}^n | Au = b, \overline{A}u \leqslant \overline{b}\}.$$

Наряду с общей задачей (1) мы будем рассматривать *каноническую* задачу линейного программирования на множестве

$$\mathbf{U} = \{u \in \mathbb{R}^n | Au = b, u \geqslant 0\}. \tag{2}$$

Заметим, что задача (1) сводится к задаче (2). Действительно, положим в (1)

$$w_i = \max\{0, u_i\} \geqslant 0, \quad v_i = \max\{0, -u_i\} \geqslant 0, \quad y = \overline{b} - \overline{A}u \geqslant 0.$$

Тогда можно рассмотреть задачу (2) относительно новой переменной z:

$$z = (y, v, w) \in \mathbb{R}^{2n+s},\ z \geqslant 0$$

$$J(u) = \langle c, u\rangle = \langle c, w - v\rangle \text{ — линейна по } z \text{ (не зависит от } y),$$

а ограничения задаются равенством $A(w - v) = b$.

Определение. Точка v выпуклого множества $\mathbf{U}$ называется *угловой* точкой этого множества, если из соотношения $v = \alpha x + (1 - \alpha)y$, где $x, y \in \mathbf{U}, \alpha \in (0, 1)$, следует, что $v = x = y$.

Теорема 19. ***(критерий угловой точки для канонического U)***
Пусть $A = (A_1|A_2|\cdots|A_n)$ (расписано по столбцам). Точка v является угловой точкой канонического множества $\mathbf{U}$ тогда и только тогда, когда существует набор столбцов $A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_r}$ $(j_1 < j_2 < \dots < j_r)$, $r = \operatorname{rank} A$, причём

$$A_{j_1}v_{j_1} + A_{j_2}v_{j_2} + \dots + A_{j_r}v_{j_r} = b, \tag{3}$$

где $v_{j_i} \geqslant 0$ $(i = \overline{1, r})$, а $\forall j \notin J_b = \{j_1, j_2, \dots, j_r\}$ $\quad v_j = 0$.

Доказательство.

Необходимость.

Пусть точка v является угловой для множества $\mathbf{U}$. Если $v = 0$, то в (3) можно взять любые базисные столбцы матрицы A. Рассмотрим случай, когда $v \neq 0$. Пусть

$$v_{j_1} > 0, v_{j_2} > 0, \ldots, v_{j_k} > 0,$$

а остальные $v_j = 0$.

Покажем, что столбцы $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_k}$ линейно независимы. Необходимо доказать, что равенство

$$\gamma_{j_1} A_{j_1} + \gamma_{j_2} A_{j_2} + \cdots + \gamma_{j_k} A_{j_k} = 0 \tag{$*$}$$

выполняется только тогда, когда

$$\gamma_{j_1} = \gamma_{j_2} = \cdots = \gamma_{j_k} = 0.$$

Введём вектор $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ так, что $\gamma_j = \gamma_{j_i}$, если $j = j_i$, и $\gamma_j = 0$, если $j \neq j_i$ ни для какого i. Равенство $(*)$ выполняется тогда и только тогда, когда $A\gamma = 0$.

Рассмотрим точку $v_{\pm\varepsilon} = v \pm \varepsilon$. $v_{\pm\varepsilon} \geqslant 0$ (для достаточно малых $\varepsilon > 0$), $Av_{\pm\varepsilon} = Av \pm \varepsilon A\gamma = Av = b$. Отсюда следует, что $v_{\pm\varepsilon} \in \mathbf{U}$. В то же время $v = \frac{v_{+\varepsilon}}{2} + \frac{v_{-\varepsilon}}{2}$, а так как v — угловая точка, то $v_{+\varepsilon} = v_{-\varepsilon} = v$. Но $\varepsilon \neq 0$ и значит $\gamma = 0$, то есть $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_k}$ линейно независимы.

Теперь достаточно заметить, что (3) выполняется после дополнения $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_k}$ до базисного набора в случае, когда $k < r$. Необходимость доказана.

Достаточность.

Пусть для точки v выполнены условия (3). Значит, $v \geqslant 0$, $Av = b$, то есть $v \in \mathbf{U}$. Требуется доказать, что из условия

$$v = \alpha x + (1-\alpha) y, \quad \alpha \in (0,1),\ x, y \in \mathbf{U}$$

следует, что $v = x = y$.

Если $v_j = 0 = \alpha x + (1-\alpha)y$, то $v_j = x_j = y_j = 0$, так как $\alpha > 0$, а $x_j \geqslant 0$ и $y_j \geqslant 0$.

Выделим все $v_{j_1} > 0, \ldots, v_{j_k} > 0$ (остальные координаты равны нулю). Тогда, так как $v, x, y \in \mathbf{U}$, то

$$\begin{cases} A_{j_1} v_{j_1} + A_{j_2} v_{j_2} + \cdots + A_{j_k} v_{j_k} = b \\ A_{j_1} x_{j_1} + A_{j_2} x_{j_2} + \cdots + A_{j_k} x_{j_k} = b \\ A_{j_1} y_{j_1} + A_{j_2} y_{j_2} + \cdots + A_{j_k} y_{j_k} = b \end{cases}$$

Учитывая, что $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_k}$ линейно независимы, получаем, что $v_{j_i} = x_{j_i} = y_{j_i} > 0$ для любого $i = \overline{1,k}$. Теорема доказана. □

Определение. Угловая точка v канонического множества $\mathbf{U}$ называется *невырожденной*, если $v_j > 0,\ \forall j \in J_b$. Эти координаты (j) называются *базисными* для точки v:

$$B = (A_{j_1} | A_{j_2} | \ldots | A_{j_r}) \text{ - базис } v.$$

Определение. Если у множества $\mathbf{U}$ все угловые точки невырожденные, то задана минимизации (2) называется *невырожденной.*

Упражнение 14 (3). Пусть

$$\mathbf{U} = \{u \in \mathbb{R}^4 \mid u \geqslant 0, Au = b\},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найти все угловые точки $\mathbf{U}$ и исследовать их на невырожденность.

Симплекс-метод

Здесь мы применим аппарат угловых точек для рассмотрения оптимизационной задачи следующего вида:

$$J(u) = \langle c, u \rangle \to \inf \quad u \in \mathbf{U} = \{u \geqslant 0, Au = b\} \tag{1}$$

Идея метода лежит в переборе лишь только угловых точек множества $\mathbf{U}$. Часто это позволяет найти оптимальное решение быстрее рассмотренных выше методов. Перейдем к описанию симплекс-метода.

Пусть имеется угловая точка v множества $\mathbf{U}$ (каким образом она находится нам сейчас не важно). Будем считать также, что из матрицы A выкинуты все линейно зависимые строки (в системе нет линейно зависимых уравнений), то есть $r = \operatorname{rank} A = m$. Находясь в условиях Теоремы 19 можно записать, что $v_b = (v_{j_1}, \ldots, v_{j_r})$ — базисные для v, $v_{j_r} \geqslant 0$, а остальные v_j равны нулю. Обозначим через J_b множество $\{j_1, \ldots, j_r\}$, а через J_f — множество $\{1, \ldots, n\} \backslash J_b$. Пусть далее для соответствующих A_{j_i} матрица $B = (A_{j_1} | A_{j_2} | \cdots | A_{j_r})$, а остальные столбцы матрицы A образую некую матрицу $F_{r \times (n-r)}$. По определению B и Теореме 19 $B \neq 0$ и существует обратная матрица B^{-1}.

Разобьём вектор $u = (u_1, \ldots, u_n)$ на базисные переменные $u_b = (u_{j_1}, \ldots, u_{j_n})$ и на свободные переменные u_f. Тогда условие $Au = b$ можно записать как $Bu_b + Fu_f = b$. В этом случае для u_b в (1) справедливо равенство $u_b = B^{-1}b - B^{-1}Fu_f$, а так как $Av = b \Leftrightarrow Bv_b + Fv_f = Bv_b = b$, то это можно переписать как $u_b = v_b - B^{-1}Fu_f$. Теперь от канонических ограничений $u \geqslant 0$ можно перейти к неканонической форме:

$$\begin{cases} u_f \geqslant 0, \\ B^{-1}Fu_f \leqslant v_b. \end{cases}$$

Для функции $J(u)$, используя те же рассуждения, можно написать:

$$J(u) = \langle c, u \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle c_b, u_b \rangle_{\mathbb{R}^r} + \langle c_f, u_f \rangle_{\mathbb{R}^{n-r}} = \langle c_b, v_b \rangle_{\mathbb{R}^n} + \left\langle c_f - (B^{-1}F)^T c_b, u_f \right\rangle_{\mathbb{R}^{n-r}} = J(v) - \langle \Delta, u_f \rangle, \tag{2}$$

где $J(v) = \langle c, v \rangle$, $-\Delta = c_f - (B^{-1}F)^T c_b$.

Введём обозначение

$$g(u_f) = J(v) - \langle \Delta, u_f \rangle_{\mathbb{R}^{n-r}}. \tag{3}$$

Заметим, что в этом случае $J(v) = C \equiv const$. Тогда задача (1) сводится к задаче с меньшим количеством переменных, но с неканоническими ограничениями:

$$\begin{cases} g(u_f) = J(v) - \sum\limits_{j \in J_f} \Delta_j u_j \to \inf, \\ u_f \in \mathbf{U}_f = \{u_f \geqslant 0,\ (B^{-1}F)u_f \leqslant v_b\}. \end{cases} \tag{4}$$

Обозначим через J_f^+ множество тех $j \in J_f$, для которых $\Delta_j > 0$. И пусть $k \in J_f^+$, например, самый меньший:

$$k = \min_{j \in J_f^+} j. \tag{5}$$

Рассмотрим для (4) подзадачу минимизации функции от одной переменной $u_f = (0, \ldots, 0, u_k, 0, \ldots, 0)$:

$$\begin{cases} g_k(u_k) = J(v) - \Delta_k u_k \to \inf, \\ u_k \in \mathbf{U}^k = \{u_k \geqslant 0,\, (B^{-1}F)_k u_f \leqslant v_b\}. \end{cases}$$

Обозначим через γ_k вектор $(B^{-1}F)_k = B^{-1}A_k$, и пусть

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} \gamma_{1k} \\ \gamma_{2k} \\ \vdots \\ \gamma_{rk} \end{pmatrix}, \quad I_k^+ = \{i = \overline{1, r} \mid \gamma_{ik} > 0\}, \tag{6}$$

(I_k^+ есть множество “реальных” ограничений сверху на u_k). Тогда в качестве решения подзадачи можно взять

$$\theta_k = \min_{i \in I_k^+} \left(\frac{v_{ji}}{\gamma_{ik}} \right). \tag{7}$$

Опишем теперь непосредственно сам метод. Возможны следующие ситуации.

1) $J_f^+ = \varnothing$. В этом случае v принадлежит множеству $\mathbf{U}_*$ (оптимальна) и мы останавливаемся.

2) $J_f^+ \neq \varnothing$, и существует такой номер $k \in J_f^+$, что $I_k^+ = \varnothing$. Но тогда нет “реальных” ограничений на u_k, которые могут бесконечно возрастать. Откуда $J_* = -\infty$, $\mathbf{U}_* = \varnothing$ и процесс итерирования следует остановить.

3) Множество J_f^+ не пусто и для любого k из J_f^+ соответствующее множество I_k^+ также не пусто. (Этот случай представляет собой непосредственно “шаг” метода.)

   Берём k по правилу (5), $u_k = \theta_k$ по правилу (7).

   В (7) минимум может достигаться на нескольких номерах, поэтому введём супер-мега-множество

   $$\left(I_k^+\right)_* = \left\{ i \in I_k^+ \mid \frac{v_{ji}}{\gamma_{ik}} = \theta_k \right\},$$

   и из него выберем, например, наименьший элемент $s = \min\limits_{i \in \left(I_k^+\right)_*} i$.

   После этого переходим к рассмотрению следующей угловой точки $w \in \mathbf{U}$, которая вычисляется по правилу $w_b = v_b - B^{-1}A_k u_k$. Докажем, что при использовании такого правила мы действительно получим угловую точку.

   Для точки w соответствующая ей матрица B будет иметь вид

   $$B(w) = (A_{j_1} | \cdots | A_{j_{s-1}} | A_k | A_{j_{s+1}} | \cdots | A_{j_r}).$$

Нам необходимо показать, что это есть базис. Сделаем это по определению. Пусть

$$\alpha_1 A_{j_1} + \ldots + \alpha_{s-1} A_{j_{s-1}} + \alpha_k A_k + \alpha_{s+1} A_{j_{s+1}} + \ldots + \alpha_r A_{j_r} = 0.$$

Подставим в это равенство $A_k = B\gamma_k = \gamma_{1k} A_{j_1} + \ldots + \gamma_{rk} A_{j_r}$. Тогда так как $B(v)$ есть базис, то необходимо должно выполняться

$$\begin{cases} \alpha_i + \alpha_k \gamma_{ik} = 0, & \forall i \neq s, \\ \alpha_k \gamma_{sk} = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что все α_i равны нулю, то есть $B(w)$ — базис.

Таким образом по Теореме 19 мы получаем, что w действительно угловая точка множества $\mathbf{U}$.

Замечания.

1) В случае, когда v вырождена $\theta_k = 0$ и $v = w$. При этом может произойти зацикливание процесса, но правила выбора k и s (правила Блэнда) позволяют избежать этого.

2) Если угловых точек в множестве $\mathbf{U}$ конечное число, то остановка процесса произойдёт через конечное число шагов на случаях 1) или 2).

В конце пункта сформулируем обобщающую наши рассуждения теорему.

Теорема 20. ***(к задаче линейного программирования)***
В задаче линейного программирования выполняются следующие утверждения:

1) если $\mathbf{U} \neq \varnothing$, то в $\mathbf{U}$ существует по крайней мере одна угловая точка;

2) если $J_* > -\infty$, то во множестве U_* содержится по крайней мере одна точка.

Доказательство.
Доказательство этой теоремы, по сути, приводится в обосновании симплекс-метода (перебора по угловым точкам). □

Замечание. Утверждение 2) справедливо именно для задачи линейного программирования. В противном случае это, вообще говоря, не верно. Например, если $J(u) = e^{-u}$ (это не задача линейного программирования), то $\mathbf{U} = \mathbb{R}^1$, $J_* = 0$, но $U_* = \varnothing$.

Вопрос 22.
Описание статистической модели Леонтьева. Условие продуктивности.

Описание статистической модели Леонтьева.

Введем следующие обозначения:
$x_i(t)$ - *валовой выпуск* i-ой отрасли в период t (также может использоваться термин *объем производства*);
$z_{ij}(t)$ - *объем продукции* i-ой отрасли, используемой в период t в j-ой отрасли;
$w_i(t)$ - конечный выпуск i-ой отрасли.

Отметим, что на самом деле величина $\dfrac{z_{ij}(t)}{x_j(t)}$ слабо зависит от времени. Соответственно, Леонтьевым была выдвинута гипотеза о следующей пропорциональности:
$\dfrac{z_{ij}(t)}{x_j(t)} \approx a_{ij}$ - это число является *нормой затрат* продукции i-ой отрасли на выпуск единицы продукции j-ой отрасли.
Из этих чисел можно составить матрицу, называемую *матрицей межотраслевого баланса Леонтьева*: $A = \left\| a_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n}$, где n – число отраслей.
Очевидно, что валовой выпуск составляется из сырьевых затрат и конечного выпуска:
$x_i(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} z_{ij}(t) + w_i(t)$. Тогда используя гипотезу Леонтьева, запишем
$x_i(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j(t) a_{ij} + w_i(t)$.
Далее введем:
- вектор валового выпуска $\overline{x} = (x_1,..., x_n)$;
- вектор конечного выпуска $\overline{w} = (w_1,..., w_n)$.

Тогда связь между валовым выпуском и конечным выпуском выглядит следующим образом: $\overline{x} = A\overline{x} + \overline{w}$ (*). При этом накладываются следующие условия: $\overline{w} > 0$ (все компоненты этого вектора строго положительны), $\overline{x} \geq 0$ (все компоненты этого вектора неотрицательны), $A \geq 0$ (все элементы матрицы неотрицательны). Тогда уравнение (*) вместе с изложенной интерпретацией матрицы A и векторов $\overline{x}, \overline{w}$ называется *статистической моделью Леонтьева*.
При этом задача формулируется следующим образом: при заданном векторе $\overline{w}$ требуется определить необходимый вектор $\overline{x}$ валового выпуска, т.е. решить систему

$$\begin{cases} \overline{x} = A\overline{x} + \overline{w} \\ \overline{w} > 0,\ \overline{x} \geq 0,\ A \geq 0 \end{cases} \quad (1).$$

Отметим, что когда решение системы (1) существует для любого неотрицательного вектора $\overline{w}$, говорят, что модель Леонтьева (и матрица A) продуктивна.

Условие продуктивности.

<u>Опр.1.</u> Пусть $D = \left\| d_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n}$ удовлетворяет условию $d_{ij} \leq 0$ при $i \neq j$. Будем говорить, что D является *продуктивной* матрицей, если существует такой вектор $\overline{x} \geq 0$, что $D\overline{x} > 0$.
Теперь дадим определение относительно модели Леонтьева.

<u>Опр.2.</u> Будем говорить, что неотрицательная квадратная матрица A *продуктивна*, если

$\exists\, \overline{x} \ge 0, \overline{w} > 0$ такие, что $\overline{x} = A\overline{x} + \overline{w}$.

<u>Теорема Фробениуса-Перрона.</u>
Пусть A неотрицательная квадратная матрица. Тогда:
1) среди собственных чисел матрицы A есть неотрицательные вещественные числа и наибольшему из них $\lambda\,(A)$ соответствует неотрицательный собственный вектор;
2) $\exists$ матрица $(\rho\, E - A)^{-1} \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho > \lambda\,(A)$;
3) если $A\overline{x} \ge \mu\, \overline{x},\ \overline{x} \ge 0, \overline{x} \ne 0$, то $\lambda\,(A) \ge \mu$;
4) если $A\overline{z} = \varpi\, \overline{z},\ \overline{z} \ne 0$, то $|\varpi| \le \lambda\,(A)$.

<u>Опр.3.</u> Собственное число $\lambda\,(A)$ называется *числом Фробениуса-Перрона* матрицы A, а вектор $\overline{x}_A \ge 0,\ \overline{x}_A \ne 0$ (все координаты вектора ненулевые и одного знака, т.е. его можно выбрать положительным) называется *вектором Фробениуса-Перрона* матрицы A.

Отметим, что вектор Фробениуса-Перрона определен неоднозначно (с точностью до скалярного множителя).

<u>Теорема</u>
Матрица A (модель Леонтьева) продуктивна тогда и только тогда, когда ее число Фробениуса-Перрона удовлетворяет условию $\lambda(A) < 1$.

<u>Доказательство:</u>
Покажем достаточность. Поскольку все собственные числа матрицы A по модулю меньше единицы, то 1) $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$, 2) матрица $(E\text{-}A)$ невырождена. Покажем справедливость данных соотношений.
Поскольку $A\overline{x}_A = \lambda_A \overline{x}_A$, то $\lim\limits_{k\to\infty} A^k \overline{x}_A = \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_A^k \overline{x}_A = 0$. Учитывая, что $\overline{x}_A > 0,\ A^k \ge 0$, получаем, что $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$.
Рассмотрим равенство $(E - A)(E + A + A^2 + ... + A^{k-1}) = E - A^{k-1}$. Поскольку предел при $k \to \infty$ правой части существует, то существует и предел левой части, т.е. $(E - A)\sum\limits_{k=1}^{\infty} A^k = E$. Поскольку $A^k \ge 0$, k=1,2,…., то $(E - A)^{-1} \ge 0$, из чего непосредственно вытекает, что для любого вектора $\overline{w} > 0$ существует неотрицательное решение системы уравнений (1):

$$\overline{x} = (E - A)^{-1}\overline{w}, \quad \text{что и означает продуктивность.}$$

Необходимость. Пусть модель Леонтьева продуктивна. Возьмем в качестве вектора $\overline{w}$ в уравнении системы (1) произвольный положительный вектор. По предположению о продуктивности, существует вектор $\overline{x} \ge 0$ такой, что $\overline{x} - A\overline{x} = \overline{w}$, т.е. $\overline{x} > A\overline{x}$. Умножая последнее неравенство скалярно на $\overline{x}_A > 0$, имеем $(\overline{x}, \overline{x}_A) > \lambda_A(\overline{x}, \overline{x}_A)$. Поскольку $(\overline{x}, \overline{x}_A) > 0$, то окончательно получаем $\lambda(A) < 1$.

<u>ч.т.д</u>.

Приведем еще один достаточный признак продуктивности, предварительно сформулировав новые понятия.
<u>Опр</u>. Пусть A неотрицательная квадратная (n×n) матрица. Будем говорить, что она *разложима*, если $\exists$ собственное подмножество J множества {1,2,..,n} такое, что $a_{ij} = 0$ при $i \notin J$ и $j \in J$.

Опр. Будем говорить, что неотрицательная квадратная $(n \times n)$ матрица *A неразложима*, если: 1) она не является разложимой; 2) не является нулевой матрицей первого порядка.

Утв. Если матрица неотрицательна и неразложима, сумма элементов каждой строки не больше 1 и хотя бы для одной строки строго меньше 1, то матрица *A* продуктивна.

Использованные материалы:

1) лекции А.А.Шананина «Математические модели в экономике» (отсюда взято описание модели Леонтьева);
2) С.А.Ашманов «Введение в математическую экономику» (отсюда взято все, что связано с продуктивностью).

Вопрос23.
Модель Курно. Теорема Нэша.

Теорема Нэша.

Для начала введем некоторые понятия из теории игр.
Пусть $N = \{1,...,n\}$ - множество участников игры; X_i - множество стратегий i-го игрока.
Опр. Исходом игры называется выбор всеми игроками стратегий из своих множеств.
Введем еще дополнительные обозначения:
$x_i \in X_i$ - стратегия, выбранная i-м игроком из своего множества;
$X = X_1 \times ... \times X_n$ - множество исходов игры;
$x \in X$ - конкретный исход игры;
$x_{-i} = (x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n) \in X_{-i} = X_1 \times ... \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times ... \times X_n$ - стратегия игроков, номер которых отличен от i;
$u_i(x_i, x_{-i})$ - функция выигрыша i-го игрока.
Опр. *Игрой* в нормальной форме называется тройка $\Gamma = \{N, \{X_i\}_{i\in N}, \{u_i(x_i, x_{-i})\}_{i\in N}\}$.
Опр. Будем говорить, что исход игры $x^* = (x_1^*,...,x_n^*) \in X$ называется *равновесием по Нэшу,* если $\forall i \in N$ функция выигрыша $u_i(x_i, x_{-i}^*) \le u_i(x_i^*, x_{-i}^*)$, $\forall\, x_i \in X_i$.

Теорема Нэша.
Пусть $\Gamma = \{N, \{X_i\}_{i\in N}, \{u_i(x_i, x_{-i})\}_{i\in N}\}$ - игра в нормальной норме такая, что:
1) $\forall i \in N$ множество X_i, являющееся подмножеством линейного топологического пространства, представляет собой выпуклый компакт;
2) $\forall i \in N$ функция $u_i(x_i, x_{-i})$ непрерывна по (x_i, x_{-i}) на X;
3) $\forall i \in N$ $\forall\, x_{-i} \in X_{-i}$ функция $u_i(x_i, x_{-i})$ вогнута по x_i на X_i
Тогда в игре Γ существует равновесие по Нэшу.

Модель олигополистической конкуренции Курно.

Пусть $P(x)$ - обратная функция спроса. Мы требуем выполнения условий (A1):
$P(x) \in C^2$ (дважды непрерывно дифференцируема);
$P(0) > 0$;
$P'(x) < 0$ (убывающая функция);
$\exists\, M > 0 : P(M) = 0$.

Кроме того, будем предполагать, что функция $xP(x)$ вогнута по x (если $P''(x) \le 0$, то $(xP(x))'' = P''(x)x + 2P'(x) = 0$).
Пусть $N = \{1,...,n\}$ - множество производителей; $\forall i \in N$ $x_i \in [0, M]$ - объем выпуска i-го производителя; $c_i(x_i)$ - издержки i-го производителя при производстве объема выпуска x_i.
Введем предположения (A2) относительно издержек:
$c_i(x_i) \in C^2, \quad \forall i \in N$
$c_i'(x_i) > 0$
$c_i''(x_i) \ge 0$ (функция выпукла).

Обозначим через $u_i(x_i, x_{-i}) = x_i P\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) - c_i(x_i)$ прибыль i-го производителя (в терминах теории игр, это его функция выигрыша). Задача i-го производителя - максимизировать свою прибыль.
Мы описали модель Курно и задали игру в нормальной форме:

1) $X_i = [0, M], \quad i = \overline{1,n}$ - множество стратегий
2) N – множество игроков
3) $\{u_i(x_i, x_{-i})\}_{i=1}^{n}$ - функции выигрыша.

<u>Теорема.</u>
Пусть выполняются условия (A1) и (A2). Тогда в модели Курно существует равновесие по Нэшу.

<u>Доказательство:</u>
X_i - выпуклые компакты (т.к. являются отрезками); $u_i(x_i, x_{-i})$ непрерывны по совокупности переменных (по условию теоремы). Осталось проверить, что $u_i(x_i, x_{-i})$ вогнуты по x_i для $\forall\ x_{-i} \in X_{-i}$. Тогда по теореме Нэша будет существовать равновесие по Нэшу.

Для этого необходимо проверить выполнимость неравенства $\dfrac{\partial^2 u_i(x_i, x_{-i})}{\partial x_i^{\,2}} \le 0$ (так ли это?).

Будем исходить из определения функций u_i: $\dfrac{\partial^2 u_i(x_i, x_{-i})}{\partial x_i^{\,2}} = x_i P''\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) + 2P'\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) \underbrace{- c_i''(x_i)}_{\le 0}$.

Осталось показать, что $x_i P''\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) + 2P'\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) \le 0$. Возможны два случая:

1) если $P''(x) \le 0$, то получаем д-во теоремы
2) если $P''(x) > 0$, то $\underbrace{x_i P''\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)}_{>0} + 2P'\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) \le \underbrace{\sum_{j=1}^{n} x_j}_{обозн.\ как\ x} P''\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) + 2P'\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) =$

$= (xP(x))'' \le 0$. Следовательно, $u_i(x_i, x_{-i})$ вогнуты по x_i для $\forall\ x_{-i} \in X_{-i}$. Тогда, по теореме Нэша, $\exists$ равновесие по Нэшу.

<u>ч.т.д.</u>

<u>Утв.</u>
Равновесие по Нэшу в модели Курно единственно.

Пусть $(x_1^*, ..., x_n^*)$ - равновесие по Нэшу. Обозначим $G = \sum_{j=1}^{n} x_j^*$. По определению равновесия по Нэшу, $u_i(x_i^*, x_{-i}^*) = \max\limits_{x_i \in [0,M]} \left[P\left(x_i + \sum_{j \ne i}^{n} x_j^*\right) x_i - c_i(x_i) \right]$. Ничего не изменится, если рассмотреть max на $[0, +\infty)$. Если $x_i^* > 0$, то $[...]'_{x_i = x_i^*} = 0$, если $x_i^* = 0$, то $[...]'_{x_i = x_i^*} \le 0$. Объединяя эти случаи, получаем систему $\begin{cases} P'(G)x_i^* + P(G) - c_i'(x_i^*) \le 0 \\ x_i^*\left[P'(G)x_i^* + P(G) - c_i'(x_i^*)\right] = 0 \end{cases}$.

Возможны два случая:

1) $x_i^* = 0$, то i-й производитель избыточен

2) $x_i^* > 0$, то из системы однозначно определяется x_i^* как функция от G, т.е. $x_i^*(G)$. Т.к. $P'(G) < 0,\ c_i''(x_i) \geq 0$ $P'(G)x_i + P(G) - c_i'(x_i)$ - монотонно убывает по x_i. При $x_i \to \infty$ $[...] \to -\infty$.

Использованные материалы:

1) лекции А.А.Шананина «Математические модели в экономике»;
2) С.А.Ашманов «Введение в математическую экономику».

Вопрос 24.
Постановка задачи оптимального управления. Понятие о задаче синтеза.

Постановка задачи оптимального управления.

Предположим, что рассматриваемый объект в каждый момент времени t описывается конечным набором чисел $x_1(t),...,x_n(t)$, которые называются *фазовыми координатами объекта.* Из этих чисел образуем вектор $x = (x_1(t),...,x_n(t)) \in \Re^n$ - вектор фазовых координат.

Изменение фазовых координат во времени запишем с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений, записанной в векторной форме:

$$\dot{x} = f(t,x,u).$$

Для того чтобы описать конкретное изменение конкретного объекта необходимо:
1) выбрать управление $u = u(t)$ как функцию переменного t;
2) задать начальное состояние $x(t_0) = x_0$;
3) решить задачу Коши $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,u(t)) = F(t,x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$.

Рассматриваем вектор управления $u = (u_1,...,u_m) \in \Re^m$. Опишем класс допустимых управлений:
1) накладываются геометрические ограничения $u_{\min} \le u \le u_{\max}$ или $0 \le u \le u_{\max}$. Обобщая эти ситуации, будем считать, что вектор управления в любой момент времени t удовлетворяет условию $u(t) = u \in U, \forall t,$ где множество $U \in \Re^m$ - область управления;
2) структурные ограничения: описание, в каком классе функций происходит работа
- кусочно-постоянные функции
- измеримые и ограниченные функции
- гладкие функции.

Тогда $D_U = \{u(t) \,|\, 1)\; u(t) \in U, \forall t;\; 2)\; \textit{структурные ограничения}\}$- множество допустимых управлений. В дальнейшем рассматриваем только допустимые управления: $u(\cdot) \in D_U$.
Будем считать, что вектор начального состояния управляемого объекта x_0 принадлежит множеству начальных состояний $M_0 \in \Re^n$: $x(t_0) \in M_0$. Если необходимо перевести объект из начального состояния в конечное ($t_0 \le t \le t_1$), то вводится множество конечных состояний M_1: $x(t_1) \in M_1$.

Рассмотрим функционал $J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t,x(t),u(t))dt$, где $f^0(t,x,u)$- известная функция своих аргументов. Функционал J сопоставляется каждой паре $(x(t),u(t)),\quad t_0 \le t \le t_1$, где
u(t) - допустимое управление,
x(t) - соответствующая ему траектория с начальным условием $x(t_0) \in M_0$, удовлетворяющая требованию $x(t_1) \in M_1$. Функционал J называется *критерием качества управления.*

Перейдем, непосредственно, к самой постановке задачи ОУ. Необходимо перевести объект из множества M_0 на множество M_1 за счет выбора допустимого управления $u(t) \in D_U$ так, чтобы минимизировать функционал J:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x,u(t)), \;\; x \in \Re^n, u \in \Re^m \\ x(t_0) \in M_0, x(t_1) \in M_1 \\ J \to \min\limits_{u(\cdot)\in D_U} \end{cases}.$$

Управление, решающее данную систему, называется *оптимальным управлением*.

Понятие о задаче синтеза.

!!! Прежде чем приступать к задаче синтеза, всем советую сначала прочитать вопросы 25-27 (там определены все понятия и обозначения, встречающиеся ниже).

Рассматривается линейная задача быстродействия $\begin{cases} \dot{x} = Ax + u \\ x(t_0) \in M_0, x(t_1) \in M_1 \\ t_1 - t_0 \to \min\limits_{u\in D_U} \end{cases}$. Далее вводятся понятия *Принцип Максимума Понтрягина* (обозначим через ПМП), *сопряженной переменной* $\psi(t)$ и т.п. (см. вопросы 25-27)

Опишем линейную модель математического маятника: $\begin{cases} \ddot{y} + y = u(t), |u(t)| \le 1 \\ y(o) = a, \; y(T) = 0 \\ \dot{y}(0) = b, \; \dot{y}(T) = 0 \\ T \to \min\limits_{u\in U} \end{cases}$.

$U = \{(u_1, u_2) \in E^2 : u_1 = 0, |u_2| \le 1\}$. Обозначим $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$. Тогда задача записывается так:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \overbrace{u_1}^{=0} \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u_2 \\ x(o) = x_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \\ x(T) = 0 \\ T \to \min\limits_{u\in U} \end{cases}$$

Будем далее обозначать управление u_2 через *u*.

Матрица вращения имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. $e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

В данном случае является информативным первое соотношение из ПМП (см. вопрос 27): $(u(t), \psi(t)) = c(U, \psi(t)), \forall t \in [0, T]$, где $c(U, \psi(t))$ - опорная функция.

<u>Опр</u>. Пусть A – компакт, $\psi \in E^n$. *Опорной функцией* к множеству A по направлению вектора ψ называется функция $c(A, \psi) = \max\limits_{a\in A}(a, \psi)$.

$u_2\psi_2 = |\psi_2|$; $u_2(t) = \begin{cases} 1, \psi_2(t) > 0 \\ -1, \psi_2(t) < 0 \\ [-1,1], \psi_2(t) = 0 \end{cases}$. Двойственная задача: $\begin{cases} \dot{\psi} = -A^*\psi = A\psi \\ \psi(0) = \psi_0 \end{cases}$.

$\psi(t)=e^{tA}\psi_0$; $\quad \psi_0=\begin{pmatrix}\psi_{10}\\ \psi_{20}\end{pmatrix}$; $\psi(t)=\begin{pmatrix}\psi_{10}Cost+\psi_{20}S\text{int}\\ -\psi_{10}S\text{int}+\psi_{20}Cost\end{pmatrix}$. $\psi_2(t)=0,\ \forall t\in[\tau_1,\tau_2]$ - противоречие ПМП, т.е. $\psi_2(t)$ может обращаться в 0 только в некоторых точках.

$\psi_2(t)=\left(-\psi_{10}S\text{int}+\psi_{20}Cost\right)=C\cdot Cos(\alpha+t),\ \alpha\in[0,2\pi]$; $\ u_2=sign\,\psi_2(t)$.

$$u_2(t)=\begin{cases}\pm1,\ 0\le t\le\tau,\ \tau\le\pi\\ \mp1,\ \tau\le t\le\tau+\pi\\ \pm1,\ \tau+\pi<t\le\tau+2\pi\end{cases}$$

Нас интересует вопрос, как можно попасть в начало координат без переключения? Основным понятием в задаче синтеза является тот факт, что управление рассматривается не как функция от времени, а как функция от координат. Поэтому рассмотрим синтез быстродействия в начало координат для задачи о маятнике. Предварительно оговорим, что управление $u(t)\in U=S_1(0)$, где $S_1(0)$ - круг с центром в 0 радиуса 1.

$x_0\in M_0=S_\pi\begin{pmatrix}3\pi\\0\end{pmatrix}, x(T)\in M_1=S_\pi(0)$. Двойственная задача: $\begin{cases}\dot\psi=-A^*\psi\\ \psi(0)=\psi_0\end{cases}$.

$\psi(t)=e^{tA}\psi_0=\begin{pmatrix}\psi_{10}Cost+\psi_{20}S\text{int}\\ -\psi_{10}S\text{int}+\psi_{20}Cost\end{pmatrix}$; $\|\psi(t)\|=\|\psi(0)\|=1$.

ПМП:

1) $(u(t),\psi(t))=c(S_1(0),\psi)=\|\psi(t)\|$; $\ u(t)=\dfrac{\psi(t)}{\|\psi(t)\|}=\psi(t)$

2) $(x(0),\psi(0))=c(M_0,\psi(0))\Rightarrow x(0)\in M_0$, $\ x(0)=\begin{pmatrix}3\pi\\0\end{pmatrix}+\pi\psi(0)\in\partial M_0$

3) $(x(T),-\psi(T))=c(M_1,-\psi(T)),\ x(T)\in\partial M_1$; $\quad x(T)=-\pi\psi(T)$.

Формула Коши:

$$x(t)=e^{tA}(x(0)+\int_0^t e^{-sA}u(s)ds)=e^{tA}\left(\begin{pmatrix}3\pi\\0\end{pmatrix}+(\pi+t)\psi(0)\right)$$

$$x(T)=e^{TA}\left(\begin{pmatrix}3\pi\\0\end{pmatrix}+(\pi+T)\psi(0)\right)=e^{-TA}\psi(0)\pi\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}3\pi\\0\end{pmatrix}+(\pi+T)\psi(0)=-\pi\psi(0)$$

$$\begin{pmatrix}3\pi\\0\end{pmatrix}=(-2\pi+T)\psi(0)\Rightarrow\{\text{равны их нормы}\}\Rightarrow 3\pi=|2\pi+T|$$

$$T=\pi\ \Rightarrow\psi(0)=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\psi(T)=e^{\pi A}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=-E\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Управление $u(t)=e^{tA}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-Cost\\ S\text{int}\end{pmatrix}$.

Траектория $\ x(t)=e^{tA}\left(\begin{pmatrix}3\pi\\0\end{pmatrix}+(\pi+t)\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right)=(2\pi-t)\begin{pmatrix}Cost\\-S\text{int}\end{pmatrix}$.

$x(0)=\begin{pmatrix}2\pi\\0\end{pmatrix}$; $\ x(T)=-\pi\psi(T)=\begin{pmatrix}-\pi\\0\end{pmatrix}$.

$\dot x(0)=Ax(0)+u(0)=Ax(0)+\psi(0)=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\pi\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\pi\end{pmatrix}$.

Использованные материалы: курс лекций М.В.Орлова «Оптимальное управление».

Вопрос 25
Множество достижимости линейно управляемой системы. Его опорная функция

Рассмотрим задачу быстродействия:

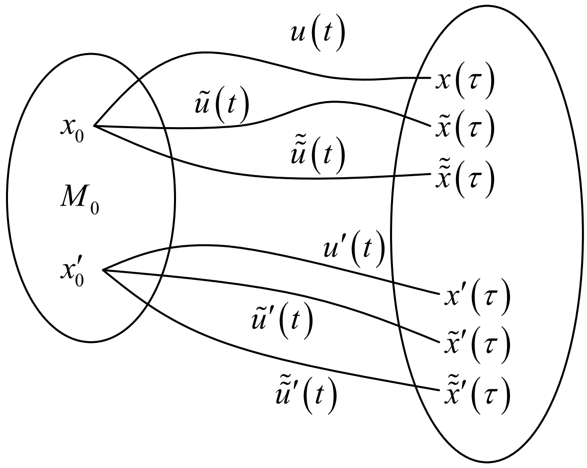
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u \\ x(t_0) \in M_0 \\ x(t_1) \in M_1 \\ t_1 - t_0 \to \min \end{cases}, u(t) \in I_U$$

Множество достижимости $X(t) = X(t_0, t, M_0)$. Введем множество $X(t_0, \tau, M_0)$, определяемое множеством M_0 (множество начальных состояний управляемого объекта $x(t_0) \in M_0$), начальным моментом t_0. Число $\tau > t_0$ зависит от класса допустимых управлений $I = I_U$ и матрицы A. Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u(t) \\ t_0 \le t \le \tau \\ x(t_0) = x_0 \in M_0 \end{cases}$$

Ее решение будет $x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}u(s)\,ds$ (из формулы Коши и теоремы Каратеодори).

Вопрос: куда можно перейти к моменту времени τ по траекториям дифференциального уравнения, исходя в начальный момент времени t_0 из различных начальных точек $x_0 \in M_0$, если разрешается использовать всевозможные допустимые управления $u(t) \in I_U$. Множество концов $x(\tau)$ описанных выше траекторий образуют множество в E^n, которое называется *множеством достижимости*.



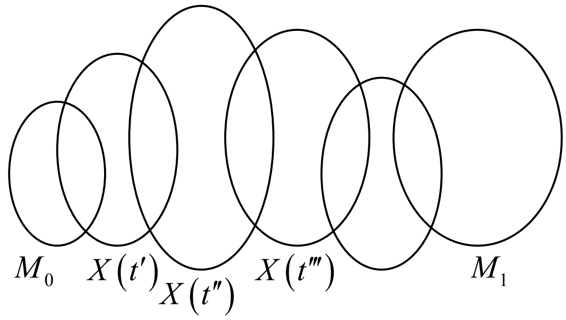
$$X(t_0, \tau, M_0) = \left\{ x \in E^n : x = x(\tau), x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}u(s)\,ds\Big|_{t=\tau}, x(t_0) \in M_0, u(t) \in I_U \right\}$$

или

$$X(t_0, \tau, M_0) = \bigcup_{\substack{x_0 \in M_0 \\ u(s) \in I_U}} \left\{ e^{(t-t_0)A}x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}u(s)\,ds \right\}$$

Опр. Множество достижимости – это множество концов $x(\tau)$ траекторий при различном выборе $x_0 \in M_0$, $u(s) \in I_U$.

Очевидно, что $X(t_0,\tau,M_0)\big|_{\tau=t_0} = M_0$. Обозначим $X(t_0,t,M_0) = X(t)$. Множество $X(t)$ с ростом t изменяется. При малых $t \Rightarrow t-t_0>0$ $X(t)\cap M_1=\varnothing$. Так при $: t_0 < t' < t'' < t''' < \ldots < t_1$ имеем:



Если $t_1 - t_0$ оптимальное время перехода из M_0 в M_1, то $X(t)\cap M_1=\varnothing$, при $t_0 \le t < t_1$ и $X(t)\cap M_1 \ne \varnothing$, при $t=t_1$.

Свойства множества достижимости $X(t)$:

1. $X(t) \equiv X(t_0,t,M_0) = e^{(t-t_0)A}M_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} I_U ds, t_0 < t_1, X(t_0) = M_0$
2. Опорная функция
$$C\big(X(t),\psi\big) = C\Big(e^{(t-t_0)A}M_0,\psi\Big) + \int\limits_{t_0}^{t} C\Big(e^{(t-s)A}U,\psi\Big)ds$$
Для получения формулы следует использовать свойства опорных функций: аддитивности по первому аргументу, теоремы о внесении знака опорной функции по первому аргументу, о внесении знака опорной функции под знак интеграла.
3. Если $M_0 \in \Omega\big(E^n\big) \Rightarrow X(t) \in \Omega\big(E^n\big)$, если $M_0 \in \mathrm{conv}\,\Omega\big(E^n\big) \Rightarrow X(t) \in \mathrm{conv}\,\Omega\big(E^n\big)$, если $M_0 = \{x_0\} \Rightarrow x(t) \in \mathrm{conv}\,\Omega\big(E^n\big)$
4. Непрерывная зависимость $X(t)$ от t: при $t' \to t \Rightarrow h\big(X(t'),X(t)\big) \to 0$
5. Непрерывная зависимость $X(t)$ от $\tau = t - t_0$ $X(\tau) = e^{\tau A}M_0 + \int\limits_0^{\tau} e^{\alpha A} U d\alpha$

Вопрос 26
Управляемость и локальная управляемость

Пусть задана задача быстродействия:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u \\ x(t_0) \in M_0 \\ x(t_1) \in M_1 \\ t_1 - t_0 \to \min \end{cases}, u(t) \in I_U$$

Множество управляемости $Z(t) = Z(t, t_1, M_1)$. Введем множество $Z(\tau, t_1, M_1)$, оно определяется множеством M_1 (множеством конечных состояний управляемого объекта), моментом времени t_1 и числом $\tau < t_1$, которое зависит от матрицы A и класса допустимых управлений I_U. Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u(t) \\ \tau \le t \le t_1 \\ x(t_1) = x_1 \in M_1 \end{cases}$$

Решение: $x(t) = e^{(t-t_1)A}x_1 + \int\limits_{t_1}^{t} e^{(t-s)A}u(s)\,ds = e^{(t-t_1)A}x_1 + \int\limits_{t}^{t_1} e^{(t-s)A}\left[-u(s)\right]ds$.

Множество $Z(\tau, t_1, M_1)$ - множество управляемости.

Опр. Множество управляемости – это множество всех таких точек $z \in E^n$, находясь в которых в момент времени τ, объект в момент времени t_1 попадет на множество M_1 при помощи допустимого управления $u(s)$.

$$Z(\tau, t_1, M_1) = \left\{ z \in E^n : z = x(\tau), x(t) = e^{(t-t_1)A}x_1 + \int\limits_{t}^{t_1} e^{(t-s)A}\left[-u(s)\right]ds\Big|_{t=\tau}, x(t_1) \in M_1, u(t) \in I_U \right\}$$

или

$$Z(\tau, t_1, M_1) = \bigcup_{\substack{x_1 \in M_1 \\ u(s) \in I_U}} \left\{ e^{(t-t_1)A}x_1 + \int\limits_{t}^{t_1} e^{(t-s)A}\left[-u(s)\right]ds \right\}.$$

Очевидно, что $Z(t, t_1, M_1)\big|_{t=t_1} = M_1$

Свойства множества достижимости $Z(t)$:

1. $Z(t) = Z(t, t_1, M_1) = e^{(t-t_1)A}M_1 + \int\limits_{t}^{t_1} e^{(t-s)A}\left[-I_U\right]ds, t < t_1, Z(t_1) = M_1$
2. Опорная функция множества управляемости:

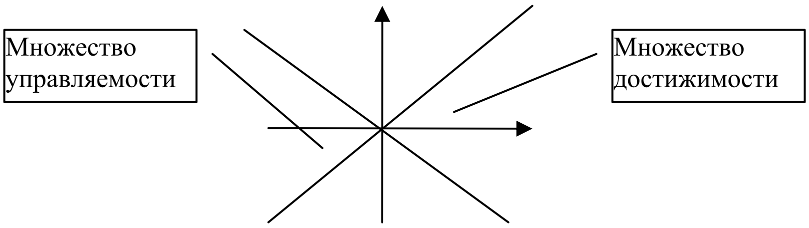
   $$C\left(Z(t), -\psi\right) = C\left(e^{(t-t_1)A}M_1, -\psi\right) + \int\limits_{t}^{t_1} C\left(e^{(t-s)A}U, \psi\right)ds$$

   Для получения формулы следует использовать свойства опорных функций: аддитивности по первому аргументу, теоремы о внесении знака опорной функции по первому аргументу, о внесении знака опорной функции под знак интеграла.
3. $M_0, M_1 \in \Omega\left(E^n\right) \Rightarrow Z(t) \in \Omega\left(E^n\right)$ и $M_0, M_1 \in \operatorname{conv}\Omega\left(E^n\right) \Rightarrow Z(t) \in \operatorname{conv}\Omega\left(E^n\right)$
4. Непрерывная зависимость от t при $t' \to t$ $h\left(Z(t'), Z(t)\right) \to 0$

5. Непрерывная зависимость от $\tau = t_1 - t$ $\; Z(\tau) = e^{-\tau A} M_0 + \int\limits_0^{\tau} e^{-\alpha A} U d\alpha$

Пример. $\dot{x} = u; x, u \in E^2, M_0 = \{0\}, M_1 = \{0\}, U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$X(t) = e^{(t-t_0)A} M_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} U ds = \{0\} + \int\limits_0^t U ds = t \operatorname{conv} U$, $Z(t) = \{0\} + \int\limits_0^t [-U] ds = t \operatorname{conv}(-U)$.



$X(t) = \{x : x_1 = t_1, |x_2| \le t\}, Z(t) = \{x : x_1 = -t_1; |x_2| \le t\}$

Опр. $\dot{x} = Ax + u(t), x \in E^n$ уравнение $\dot{\psi} = -A^* \psi$ называется сопряженным уравнением для исходного. Решение сопряженного уравнения $\psi(t) = e^{-(t-t_0)A^*} \psi(t_0)$.

Утв. $\psi(t) \ne 0 \Leftrightarrow \psi(t_0) \ne 0$.

Опр. Любое нетривиальное решение $\psi(t)$ сопряженного уравнение будет называть сопряженного переменной.

Лемма (о сопряженной переменной). $t_0 < t_1, t \in [t_0, t_1], X(t) = X(t_0, t, M_0)$ - множество достижимости, $Z(t) = Z(t, t_1, M_1)$ - множество управляемости. Для любой сопряженной переменной имеют место равенства

$$C(X(t), \psi(t)) = C(M_0, \psi(t_0)) + \int\limits_{t_0}^{t} C(U, \psi(s)) ds \text{ и}$$

$$C(Z(t), -\psi(t)) = C(M_1, -\psi(t_1)) + \int\limits_{t}^{t_1} C(U, \psi(s)) ds \text{ и}$$

$$(x(t), \psi(t)) = (x(t_0), \psi(t_0)) + \int\limits_{t_0}^{t} (u(s), \psi(s)) ds$$

$(x(t), -\psi(t)) = (x(t_1), -\psi(t_1)) + \int\limits_{t}^{t_1} (u(s), \psi(s)) ds$, где $\dot{x} = Ax + u(t)$ почти для всех $t \in [t_0, t_1]$.

Опр. Объект называется управляемым на $[t_0, t_1]$ из множества M_0 в множество M_1, если существует допустимое управление $u(s) \in I_U$ и отвечающая ему траектория $x(t)$ (т.е. $\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)$ для почти $\forall t \in [t_0, t_1]$) с начальным условием $x(t_0) = M_0, x(t_1) \in M_1$

$$\boxed{\text{Управляемость на } [t_0, t_1] \text{ из } M_0 \text{ в } M_1} \longleftrightarrow \boxed{X(t_0, t_1, M_0) \cap M_1 \ne \varnothing}$$

Теорема (критерий управляемости).

1) Если $M_0, M_1 \in \Omega\left(E^n\right)$ (компакты), то $C\left(M_0, \psi\left(t_0\right)\right)+\int\limits_{t_0}^{t_1} C\left(U, \psi\left(s\right)\right) ds+C\left(M_1,-\psi\left(t_1\right)\right) \geq 0$ является необходимым условием управляемости на $\left[t_0, t_1\right]$ из M_0 в M_1;

2) Если $M_0, M_1 \in \operatorname{conv} \Omega\left(E^n\right)$ (выпуклый компакт), то условие $C\left(M_0, \psi\left(t_0\right)\right)+\int\limits_{t_0}^{t_1} C\left(U, \psi\left(s\right)\right) ds+C\left(M_1,-\psi\left(t_1\right)\right) \geq 0$ является необходимым и достаточным условием управляемости на $\left[t_0, t_1\right]$ из M_0 в M_1;

Введем функцию управляемости:

Опр. Функция управляемости

$$\Phi_0(\psi)=C\left(M_0, \psi\right)+\int\limits_{t_0}^{t_1} C\left(U, e^{-\left(s-t_0\right) A^*}\right) ds+C\left(M_1, e^{-\left(t_1-t_0\right) A^*} \psi\right).$$

Положим $m_0=\min\limits_{\psi \in s} \Phi_0(\psi)$.

Условие управляемости эквивалентно каждому из 3 условий:

1. $\Phi_0(\psi) \geq 0, \forall \psi \in E^n$
2. $\Phi_0(\psi) \geq 0, \forall \psi \in s$
3. $m_0 \geq 0$

Чтобы доказать неуправляемость надо найти $\tilde{\psi} \in s: \Phi_0(\tilde{\psi})<0$.

Основная лемма.

1) $M_0, M_1 \in \operatorname{conv} \Omega\left(E^n\right)$;

2) $t_1-t_0 \rightarrow \min$, t_1-t_0 - оптимальное время перехода из M_0 в исходной задаче.

$\Rightarrow \exists$ сопряженная переменная $\psi(t)$: $C\left(X\left(t_1\right), \psi\left(t_1\right)\right)+C\left(M_1,-\psi\left(t_1\right)\right)=0$ или

$$C\left(M_0, \psi\left(t_0\right)\right)+\int\limits_{t_0}^{t_1} C\left(U, \psi(s)\right) ds+C\left(M_1,-\psi\left(t_1\right)\right)=0$$

Доказательство. $X(t) \cap M_1=\varnothing, t_0 \leq t<t_1$. $\exists t_k \rightarrow t_1-0, t_k \in\left[0, t_1\right] \forall k, X\left(t_k\right) \cap M_1=\varnothing$.

$\models$ т.к. $X(t) \in M_1 \in \operatorname{conv} \Omega\left(E^n\right) \Rightarrow \exists p^k \in s: C\left(X\left(t_k\right), p^k\right)+C\left(M_1,-p^k\right)<0$, $p^k \rightarrow p_* \in s$;

$C(A, \psi)$ - непрерывна по совокупности, $X(t)$ - непрерывна по t.

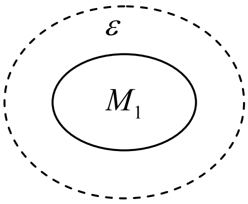
$\lim C\left(X\left(t_1\right), p_*\right)+C\left(M_1,-p_*\right) \leq 0$, $\psi\left(t_1\right)=p_* \Rightarrow C\left(X\left(t_1\right), p_*\right)+C\left(M_1,-p_*\right)=0$.

Управляемость объекта на отрезке $\left[t_0, t_1\right]$ из множества M_0 в M_1 равносильна $X\left(t_0, t_1, M_0\right) \cap M_1 \neq \varnothing$.

Локальная управляемость.

Рассмотрим управляемый объект $\dot{x}=A x+u, I=I_U, M_1 \in \Omega\left(E^n\right)$, пусть $\left[t, t_1\right]$ – заданный отрезок $t<t_1$

Опр. Объект называется локально управляемым не заданном отрезке $\left[t, t_1\right]$ на множестве M_1, если $\forall \varepsilon>0\ \ \forall y \in M_1+S_{\varepsilon}(0)$ объект является локально управляемым на отрезке $\left[t, t_1\right]$ из одноточечного множества $M_0=\{y\}$ на множестве M_1, т.е. объект локально управляем на $\left[t, t_1\right]$ на множестве M_1, если $\exists \varepsilon>0: M_1+S_{\varepsilon}(0) \subset Z\left(t, t_1, M_1\right)$



Необходимое условие локальной управляемости.

$$\exists \varepsilon > 0 : C\left(M_1, \psi\right) + \varepsilon \left\|\psi\right\| \le C\left(Z\left(t\right), \psi\right) \forall\, \psi \in E^n$$

или

$$C\left(M_1, \psi\right) \le C\left(Z\left(t\right), \psi\right) \forall\, \psi \in s\,,$$

если M_1 – выпуклое, тогда это условие является необходимым и достаточным.

Теорема (о достаточных условиях оптимальности в форме ПМП с условием локальной управляемости)

1) $M_0, M_1 \in \Omega\left(E^n\right)$;

2) $\left(x\left(t\right), u\left(t\right)\right)$ - удовлетворяет ПМП на $\left[t_0, t_1\right]$;

3) объект локально управляем на множестве M_1 на любом отрезке времени $\left[t, t_1\right]$,

$t_0 \le t < t_1$

Тогда $\left(x\left(t\right), u\left(t\right)\right)$ - оптимальна

Доказательство. Из свойств локальной управляемости

$C\left(M_1, \psi\right) + \varepsilon \left\|\psi\right\| \le C\left(Z\left(t\right), \psi\right) \forall t \in \left[t_0, t_1\right], \psi \in E^n$. $\psi = -\psi\left(t\right)$ (из ЛМП)

$\Rightarrow C\left(M_1, -\psi\left(t\right)\right) + \varepsilon \left\|\psi\right\| \le C\left(Z\left(t\right), -\psi\left(t\right)\right)$, $C\left(M_1, -\psi\left(t\right)\right) < C\left(Z(t), -\psi(t)\right) \forall t \in \left[t_0, t_1\right)$

Лемма об эквивалентности формулировки ПМП => $C\left(M_1, -\psi(t)\right) < (x(t), -\psi(t)), t \in \left[t_0, t_1\right)$.

Последнее условие – есть усиленный закон трансверсальности.

□

Рассмотрим частный случай множества конечных состояний объекта $M_1\left\{0\right\}$, состоящего из одной точки – начала координат пр-ва E^n.

Лемма (о внутренней точке)

1) $U = \left\{-u, u : u \in E^n\right\}$ - состоит из двух точек;

2) A - квадратная матрица;

3) Множество X определено интегралом $X = \int\limits_0^t e^{-sA} I ds, o < t, I = I_U$

Тогда равносильны два утверждения: $0 \in \operatorname{int} X \Leftrightarrow u, Au, \ldots, A^{n-1}u - ЛНЗ$.

Лемма 1. Равносильны 2 утверждения $0 \in \operatorname{int} X \Leftrightarrow m > 0; m = \min\limits_{\psi \in s} C(X, \psi)$

Лемма 2. $C\left(X, \psi\right) = \int\limits_0^t \left(e^{-sA} U, \psi\right) ds \ge 0$

Вопрос 27
Принцип максимума Понтрягина для линейной задачи быстродействия.

Рассмотрим задачу быстродействия:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + u \\ x(t_0) \in M_0 \\ x(t_1) \in M_1 \\ t_1 - t_0 \to \min \end{cases}, u(t) \in I_U$$

Набор $\{A, M_0, M_1, I = I_U, t_0\}$, $M_0, M_1 \in \Omega(E^n)$.

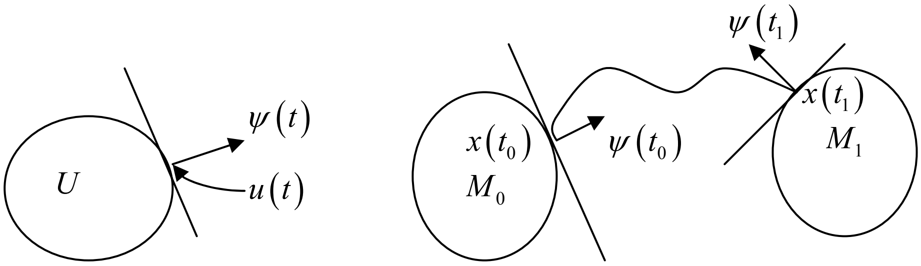
Основная лемма. $M_0, M_1 \in \operatorname{conv}\Omega(E^n), t_1 - t_0 \to \min \Rightarrow \exists\, \psi(t)$ – сопряженная переменная, что выполнено $C(X(t_1), \psi(t_1)) + C(M_1, \psi(t_1)) = 0$ или

$$C(M_0, \psi(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} C(U, \psi(s))\, ds + C(M_1, -\psi(t_1)) = 0.$$

Опр. Пара $(x(t), u(t))$, $t_0 \le t \le t_1$, где 1) $u(t) \in I$, т.е. $u(t)$ - допустимое управление на, определенное на отрезке $[t_0, t_1], \forall t \in [t_0, t_1] \Rightarrow u(t) \in U$ 2) $x(t)$ - траектория, отвечающая уравнению $u(t)$ $\Rightarrow \dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)$ почти для всех $t \in [t_0, t_1]$, $x(t_0) \in M_0, x(t_1) \in M_1$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина (ПМП) на отрезе $[t_0, t_1]$, если $\exists\, \psi(t)$ - сопряженная переменная (ненулевое решение $\dot{\psi}(t) = -A^* \psi(t)$):

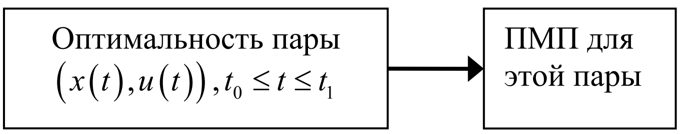
1) $(u(t), \psi(t)) = C(U, \psi(t))$ почти для всех $t \in [t_0, t_1]$ (условие максимума);
2) $(x(t_0), \psi(t_0)) = C(M_0, \psi(t_0))$ условие трансверсальности на множестве M_0;
3) $(x(t_1), \psi(t_1)) = C(M_1, -\psi(t_1))$ условие трансверсальности на множестве M_1.

Геометрический смысл:



Теорема (о необходимых условиях оптимальности в форме ПМП)

1) $M_0, M_1 \in \operatorname{conv}\Omega(E^n)$;
2) допустимая пара $(x(t), u(t)), t_0 \le t \le t_1$ решает линейную задачу быстродействия, тогда $(x(t), u(t))$ удовлетворяет ПМП.



Доказательство. $X(t_1) = X(t_0, t_1, M_0)$, $M_1 \in \operatorname{conv}\Omega(E^n)$,

$t_1 - t_0 = \min$, $X(t_0, t_1, M_0) \cap M_1 \ne \varnothing$

Основная лемма $\Rightarrow$ $\exists \psi(t)$ - сопряженная переменная:

$C(X(t_1),\psi(t_1))+C(M_1,-\psi(t_1))=0$ покажем, что выполнено условие ПМП:

$$\left[C(X(t_1),\psi(t_1))-(x(t_1),\psi(t_1))\right]+\left[C(M_1,-\psi(t_1))-(x(t_1),-\psi(t_1))\right]=0.$$

Каждая из скобок не отрицательна, отсюда следует из определения опорной функции и

$$x(t_1)\in X(t_1),x(t_1)\in M_1$$

$$C(M_1,-\psi(t_1))-(x(t_1),-\psi(t_1))=0$$

$$C(X(t_1),\psi(t_1))-(x(t_1),\psi(t_1))=0$$

Выполняются условия ПМП

По лемме

$$\begin{cases} C(X(t),\psi(t))=C(M_0,\psi(t_0))+\int\limits_{t_0}^{t_1}C(U,\psi(s))ds \\ C(Z(t),-\psi(t))=C(M_1,-\psi(t_1))+\int\limits_{t_0}^{t_1}C(U,\psi(s))ds \\ (x(t_1),\psi(t))=(x(t_0),\psi(t_0))+\int\limits_{t_0}^{t_1}(u(s),\psi(s))ds \\ (x(t_1),-\psi(t))=(x(t_1),\psi(t_1))+\int\limits_{t_0}^{t_1}(u(s),\psi(s))ds \end{cases}$$

При $t=t_1$ имеем

$$\left[C(M_0,\psi(t_0)-(x(t_0),\psi(t_0)))\right]+\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[C(U,\psi(s))-(u(s),\psi(s))\right]ds=0$$

Т.к. $x(t_0)\in M_0$, то

$C(M_0,\psi(t_0))-(x(t_0),\psi(t_0))\geq 0$, т.к. $u(s)\in U, s\in[t_0,t_1]$, то $C(U,\psi(s))-(u(s),\psi(s))\geq 0$ и

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[C(U,\psi(s))-(u(s),\psi(s))\right]ds\geq 0 \Rightarrow C(M_0,\psi(t_0))-(x(t_0),\psi(t_0))=0 \text{ и}$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[C(U,\psi(s))-(u(s),\psi(s))\right]=0$$

Таким образом, в итоге получаем $C(U,\psi(s))=(u(s),\psi(s))$ для почти всех $s\in[t_0,t_1]$.

□

Лемма. (Об эквивалентности формулировки ПМП в терминах множеств достижимости и управляемости) Пусть

1) $M_0,M_1\in\Omega(E^n)\Rightarrow$ равносильны 2 условия

Пара $(x(t),u(t)), t_0\leq t\leq t_1$ удовлетворяет ПМП с сопряженной переменной $\psi(t)$ $\Leftrightarrow$ выполняются 2 равенства: 1) $(x(t),\psi(t))=C(X(t),\psi(t))\forall t\in[t_0,t_1]$ 2) $(x(t),-\psi(t))=C(Z(t),-\psi(t))\forall t\in[t_0,t_1]$ с той же сопряженной переменной $\psi(t)$.

Доказательство. $1\rightarrow 2$:

$$C(X(t),\psi(t))=\left\{C(X(t),\psi(t))=C(M_0,\psi(t_0))+\int_{t_0}^{t_1}C(U,\psi(s))ds\right\}=$$

$$C(X(t),\psi(t))=C(M_0,\psi(t_0))+\int_{t_0}^{t_1}C(U,\psi(s))ds=\{\textit{условия ПМП}\}=(x(t_0),\psi(t_0))+$$

$$\int_{t_0}^{t_1}(u(s),\psi(s))ds=\left\{(x(t),\psi(t))=(x(t_0),\psi(t_0))+\int_{t_0}^{t_1}(u(s),\psi(s)ds)\right\}=(x(t),\psi(t))$$

Второе равенство доказывается аналогично

$2\to 1$: Пусть в $(x(t),\psi(t))=C(X(t),\psi(t))$ $t=t_0$ и в $(x(t),-\psi(t))=C(Z(t),-\psi(t))$ $t=t_1$, тогда $(x(t_0),\psi(t_0))=C(M_0,\psi(t_0))$ и $(x(t_1),-\psi(t_1))=C(M_1,-\psi(t_1))$

Получили 2 условия трансверсальности ПМП

$$(x(t),\psi(t))=C(X(t),\psi(t))$$

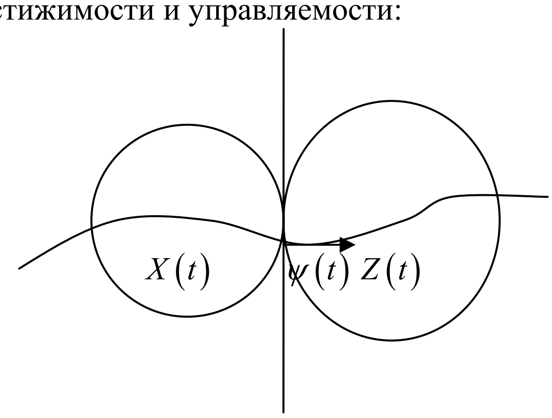
$$(x(t),\psi(t))=C(M_0,\psi(t_0))+\int_{t_0}^{t_1}C(U,\psi(s))ds$$

, тогда

$$(x(t_0),\psi(t_0))+\int_{t_0}^{t_1}C(u(s),\psi(s))ds=C(M_0,\psi(t_0))+\int_{t_0}^{t_1}C(U,\psi(s))ds$$

$0=\int_{t_0}^{t}\left[C(U,\psi(s))-(u(s),\psi(s))\right]ds, t\in[t_0,t_1]\Rightarrow C(U,\psi(s))=(u(t),\psi(t))$ почти для всех $t\in[t_0,t_1]$.

Геометрическая интерпретация: пусть $(x(t),u(t))$, удовлетворяет ПМП на отрезке $t_0\le t\le t_1$, $\psi(t)$ - сопряженная переменная. Рассмотрим гиперплоскость $\Gamma_{\psi(t)}=\{y\in E^n:(y-x(t),\psi(t))=0\}$, вектором нормали которой служит сопряженная перемененная $\psi(t)$. $x(t)\in$ каждому из множеств $X(t),Z(t),\Gamma_{\psi(t)}$. Гиперплоскость $\Gamma_{\psi(t)}$ разделяет множество достижимости и управляемости:



Теорема (существования оптимального управления для ЛЗБ)

1) $M_0,M_1\in\Omega(E^n)$

2) Класс допустимых управлений I состоит из интегрируемых по Лебегу функций;

3) на каждом отрезке $[t_0,T]$ объект управляем из M_0 в M_1

Тогда существует оптимальное управление $u(t)\in I, t_0\le t\le t_1, t_1\le T$ для ЛЗБ.

Теорема. (о достаточных условиях оптимальности ПМП с усиленными условиями трансверсальности).

1) $M_0, M_1 \in \Omega\left(E^n\right)$

2) пара $\left(x(t), u(t)\right)$ удовлетворяет ПМП на $\left[t_0, t_1\right]$ с сопряженной переменной $\psi(t)$

3) с этой же $\psi(t)$ выполняется: $\left(x(t), -\psi(t)\right) > C\left(M_1, -\psi(t)\right) \forall t \in \left[t_0, t_1\right)$ (усиленное условие трансверсальности на множестве M_1)

Тогда пара $\left(x(t), u(t)\right)$ оптимальна по быстродействию.

Замечание. Условие трансверсальности можно заменить на $\left(x(t), \psi(t)\right) > C\left(M_0, \psi(t)\right) \forall t \in \left(t_0, t_1\right]$

Доказательство. Из свойств локальной управляемости $C\left(M_1, \psi\right) + \varepsilon\|\psi\| \le C\left(Z(t), \psi\right) \forall t \in \left[t_0, t_1\right) \ \forall \psi \in E^n$, $\psi = -\psi(t) \leftarrow$ из ПМП

$$\Rightarrow C\left(M_1, -\psi(t)\right) + \varepsilon\left\|-\psi(t)\right\| \le C\left(Z(t), -\psi(t)\right) \Rightarrow$$

$$C\left(M_1, -\psi(t)\right) < C\left(Z(t), -\psi(t)\right) = \{\text{лемма об эквивалент}\} =$$

$$\left(x(t), -\psi(t)\right) \Rightarrow$$

Получили выполнение усиленного условия трансверсальности.

$\square$

Уравнения в вариациях. Построение конуса касательных направлений к множеству достижимости.

Рассмотрим систему $\begin{cases} \dot{x} = f(x, u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$, $x \in E^n$.

Считается, что управление $u(t)$ - кусочно-непрерывная на $t_0 \le t \le t_1$ функция со значениями в m - мерном пространстве E^m, непрерывная слева в каждой точке разрыва и имеющая предел справа.

Выбираем управление $u(t)$. Следовательно, $\dot{x} = f(x, u(t)) = \varphi(x_0, t)$, где $\varphi(x,t)$ - непрерывна по совокупности, т. е. $\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,t) = \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x,t) \right\}_{i,j=1}^{n}$.

Предполагаем, что $x(t, x_0, t_0) = x(t)$ для всех $t \in [t_0, t_1]$.

Рассмотрим систему $\begin{cases} \dot{x} = \varphi(x,t) \\ x(t_0) = \xi \end{cases}$. $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \xi : \left\| \xi - x_0 \right\| < \varepsilon \quad x(t, \xi, t_0)$ определено для всех $t \in [t_0, t_1]$. Также $\exists \frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi, t_0), \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi, t_0))$.

Нас будет интересовать возмущение $x(t_0) : x(t, \xi, t_0) = x(t, x_0, t_0) + \frac{\partial x(t, x_0, t_0)}{\partial \xi}(\xi - x_{0)}) + \overline{o}(\varepsilon)$.

Пусть $\xi = x_0 + \varepsilon \cdot h + \overline{o}(\varepsilon)$. Тогда

$$x(t, \xi, t_0) - x(t, x_0, t_0) = \varepsilon \cdot \frac{\partial x(t, x_0, t_0)}{\partial \xi} \cdot h + \overline{o}(\varepsilon),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(x(t, \xi, t_0) - x(t, x_0, t_0)) = \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial x(t, x_0, t_0)}{\partial \xi} \cdot h) + \overline{o}(\varepsilon).$$

Л.ч.=$\varphi(x(t, x_0 + \varepsilon \cdot h + \overline{o}(\varepsilon), t_0), t) - \varphi(x(t, x_0, t_0), t)$=[Ряд Тейлора]=

$\varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi(x(t, x_0, t_0), t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x(t, x_0, t_0)}{\partial \xi} \cdot h + \overline{o}(\varepsilon)$=[п.ч.]=$\varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial x(t, x_0, t_0)}{\partial \xi} \cdot h) + \overline{o}(\varepsilon)$

Делим на ε. $\frac{\overline{o}(\varepsilon)}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$.

Обозначим $y(t) = \frac{\partial x(t, x_0, t_0)}{\partial \xi} \cdot h$. $x(t_0) = \xi \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial \xi} = E$ (единичная матрица) при $t \to t_0$.

Получим $\begin{cases} \dot{y}(t) = \frac{\partial \varphi(x(t, x_0, t_0), t)}{\partial x} y(t) \\ y(t_0) = h \end{cases}$ - система уравнений в вариациях.

В старых обозначениях $\begin{cases} \dot{y}(t) = \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} y(t) \\ y(t_0) = h \end{cases}$. (1)

Формула $x(t, x_0 + \varepsilon \cdot h + \overline{o}(\varepsilon), t_0) = x(t, x_0, t_0) + \varepsilon \cdot y(t) + \overline{o}(\varepsilon)$ показывает отклонение траектории в момент времени t с точностью до ε.

Вектор $y(t)$ будем считать переносом вектора $y(\tau)$ из момента времени τ в момент времени t. Положим $y(t) = A_{t\tau} y(\tau)$. $A_{t\tau}$ - линейный оператор. A_{tt} - тождественное отображение и $\forall t, s, \tau \in [t_0, t_1]$ $A_{ts} \cdot A_{s\tau} = A_{t\tau}$.

Уравнение $\dot{\psi} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),u(t))\right)^* \psi$ - сопряженное. (2)

Лемма: $y(t)$ **-** решение уравнения (1), $\psi(t)$ - решение уравнения (2). Тогда их скалярное произведение постоянно: $\langle \psi(t), y(t) \rangle = const$.

Доказательство:

$$\frac{d}{dt}\langle \psi(t), y(t)\rangle = \langle \psi, y\rangle + \langle \psi, \dot{y}\rangle = -\left\langle \left(\frac{\partial f(x(t),u(t))}{\partial x}\right)^* \psi(t), y(t)\right\rangle + \left\langle \psi, \frac{\partial f(x(t),u(t))}{\partial x} y(t)\right\rangle =$$

$$= -\left\langle \psi, \frac{\partial f}{\partial x} y\right\rangle + \left\langle \psi, \frac{\partial f}{\partial x} y\right\rangle = 0 . \blacksquare$$

Введем понятие **вариаций Макшейна.**

Рассмотрим вариации управления и траекторий.

1) Пусть $\tau \in [t_0, t_1]$ - точка непрерывности функции управления $u(t) \in U$. Введем $\sigma > 0$, ε -малое положительное число, $v \in U$. Берем полуинтервал $(\tau - \varepsilon \cdot \sigma, \tau) = J(\tau,\sigma,\varepsilon)$.

Рассмотрим $u_*(t) = \begin{cases} u(t), \forall t \notin J(\tau,\sigma,\varepsilon) \\ v, t \in J(\tau,\sigma,\varepsilon) \end{cases}$ - одночленная вариация Макшейна управления $u(t)$. Обозначается $M(\tau,\sigma,v,\varepsilon)$. Макшейн предложил изменять $u(t)$ не на всем протяжении $t_0 \le t \le t_1$ на малую величину ε , а на малом промежутке значений t на конечную величину v .

Хотим сравнить управляемые величины $x(t)$ и $x_*(t)$, после прохождения отрезка *J*, когда управление $u(t)$ заменяется на $u_*(t)$ при условии, что $x(t_0) = x_*(t_0)$.

Оказывается, что $x_*(\tau) - x(\tau) = \varepsilon \cdot \sigma \cdot [f(x(\tau),v) - f(x(\tau),u(\tau))] + \overline{o}(\varepsilon)$.

Доказательство:

$$x_*(\tau) - x(\tau) = \int_{\tau-\varepsilon\cdot\sigma}^{\tau} [f(x_*(t),v) - f(x(t),u(t))]dt$$

$f(x_*(t),v) - f(x_*(\tau),v) = O(\varepsilon)$, где $O(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$

$f(x(t),u(t)) - f(x(\tau),u(\tau)) = O(\varepsilon)$, т. к. τ - точка непрерывности $u(t)$.

Следовательно, $f(x_*(t),v) - f(x(t),u(t)) = f(x_*(\tau),v) - f(x(\tau),u(\tau)) + O(\varepsilon)$

$$x_*(\tau) - x(\tau) = \int_{\tau-\varepsilon\cdot\sigma}^{\tau} [f(x_*(\tau),v) - f(x(\tau),u(\tau)) + O(\varepsilon)]dt = \varepsilon \cdot \sigma [f(x_*(\tau),v) - f(x(\tau),u(\tau))] + \varepsilon \cdot \sigma \cdot O(\varepsilon)$$

Заменой $f(x_*(\tau),v)$ на $f(x(\tau),v)$ получаем искомое уравнение. $\blacksquare$

В момент τ верно $x_*(\tau) - x(\tau) = \varepsilon \cdot \xi + \overline{o}(\varepsilon)$. Тогда $x_*(t_1) - x(t_1) = \varepsilon \cdot A_{t_1\tau}\xi + \overline{o}(\varepsilon)$.

Усложним вариацию

2) Введем τ - точка непрерывности, ε - малое положительное число, $\sigma_1,...,\sigma_s : \sigma_i \ge 0$;

$v_1,...,v_s : v_i \in U$. s – отрезков:

$J_1 = (\tau - \varepsilon \cdot (\sigma_1 + ... + \sigma_s), \tau - \varepsilon \cdot (\sigma_2 + ... + \sigma_s)]$

$J_2 = (\tau - \varepsilon \cdot (\sigma_2 + ... + \sigma_s), \tau - \varepsilon \cdot (\sigma_3 + ... + \sigma_s)]$

…

$Js = (\tau - \varepsilon \cdot \sigma_s, \tau]$

Строим $u_*(t)=\begin{cases} u(t), \forall t\in[t_0,t_1]\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{s} J_i \\ v_i, t\in J_i \end{cases}$ - усложненная одночленная вариация Макшейна $M(\tau,\sigma_1,...,\sigma_s,v_1,...,v_s,\varepsilon)$.

Оказывается, $x_*(\tau)-x(\tau)=\varepsilon\cdot\sum\limits_{i=1}^{s}\sigma_i\cdot[f(x(\tau),v_i)-f(x(\tau),u(\tau))]+\overline{o}(\varepsilon)=\varepsilon\cdot\xi+\overline{o}(\varepsilon)$ и

$x_*(t_1)-x(t_1)=\varepsilon\cdot A_{t_1\tau}\xi+\overline{o}(\varepsilon)$.

3) Определим многочленную вариацию Макшейна как последовательность одночленных вариаций.

Введем $\tau_1,...,\tau_r$ - r точек непрерывности управления $u(t)$. $t_0<\tau_1<\tau_2<...<\tau_r<t_1$

В каждой τ_i - имеется своя вариация Макшейна $M_1,M_2,...,M_r$.

$x_*(\tau)-x(\tau)=\varepsilon\cdot\xi+\overline{o}(\varepsilon)$, где $\xi=A_{\tau\tau_1}\xi_1+A_{\tau\tau_2}\xi_2+...+A_{\tau\tau_{r-1}}\xi_{r-1}+\xi_r$ и

$\xi_i=\sum\limits_{k=1}^{s_i}\sigma_k^i\cdot[f(x(\tau_i),v_k^i)-f(x(\tau_i),u(\tau_i))]$, $\tau_r=\tau$.

Протягивая на момент t_1: $x_*(t_1)-x(t_1)=\varepsilon\cdot A_{t_1\tau}\xi+\overline{o}(\varepsilon)=\varepsilon\cdot\varphi(M)+\overline{o}(\varepsilon)$.

Рассматривается совокупность $\{\varphi(M)\}$ в зависимости от всех вариаций Макшейна.

$K=\{\varphi(M),M\in\mathrm{M}\}$ - конус касательных направлений к множеству достижимости в т. $x(t_1)$, которая является вершиной конуса.

Определение: $C\subset\Re^n$ называется конусом с вершиной в т. O, если $\forall a\in C$ луч $Oa\in C$.

Определение: Сумма одночленных вариаций Макшейна $M(\tau,\sigma_1,...,\sigma_s,v_1,...,v_s,\varepsilon)$ и $M'(\tau',\sigma_1',...,\sigma_p',v_1',...,v_p',\varepsilon)$ называется

$$M+M'=\begin{cases} M(\tau,\sigma_1,...,\sigma_s,\sigma_1',...,\sigma_p',v_1,...,v_s,v_1',...,v_p',\varepsilon), \tau=\tau' \\ MM', \tau\neq\tau', \tau<\tau' \end{cases}$$

$\varphi(M+M')=\varphi(M)+\varphi(M')$.

Для многочленных вариаций справедлива та же формула.

Определение: Умножение на число λ:

$M(\tau,\sigma,v,\varepsilon)\Rightarrow\lambda M=M(\tau,\lambda\sigma,v,\varepsilon)$

$M(\tau,\sigma_1,...,\sigma_s,v_1,...,v_s,\varepsilon)\Rightarrow\lambda M=M(\tau,\lambda\sigma_1,...,\lambda\sigma_s,v_1,...,v_s,\varepsilon)$

$M:M_1M_2...M_r\Rightarrow\lambda M_1\lambda M_2...\lambda M_r$

Выполняется равенство: $\varphi(\lambda M)=\lambda\varphi(M)$

Лемма: $K=\{\varphi(M),M\in\mathrm{M}\}$ - выпуклый. Доказательство проводится на основе свойств, описанных выше: $\alpha\varphi(M_1)+\beta\varphi(M_2)=\varphi(\alpha M_1)+\varphi(\beta M_2)=\varphi(\alpha M_1+\beta M_2)\in K$ ■

Улучшаем конус(вариация по времени):

Введем $\alpha\in\Re$.

Обозначим вариацию управления $u(t)$ как $V(M,\alpha)$, M – вариация Макшейна.

После применения M получим $x_*(t)$ и $u_*(t)$.

$t_1+\varepsilon\cdot\alpha=t_1^*$

Определим $\overline{u}(t)=\begin{cases} u(t_1), t\in(t_1,t_1+\varepsilon\cdot\alpha] \\ u_*(t), t\in[t_0,t_1] \end{cases}$ при $\alpha>0$

и $\overline{u}(t)=\begin{cases} u(t), t\in\left(t_1+\varepsilon\cdot\alpha, t_1\right] \\ u_*(t), t\in\left[t_0, t_1+\varepsilon\cdot\alpha\right] \end{cases}$ при $\alpha<0$.

$$x_z(t)=x_*(t_1)+\int_{t_1}^{t} f(\overline{x}(t),\overline{u}(t))dt=x_*(t_1)+(t-t_1)f(x(t_1),u(t_1))+o(\varepsilon)$$

При t_1^* $x_*(t_1^*)=x_*(t_1)+\varepsilon\alpha\cdot f(x(t_1),u(t_1))+o(\varepsilon)$) и получаем, что

$x_*(t_1^*)-x(t_1)=\varepsilon\cdot\left[\varphi(M)+\alpha\cdot f(x(t_1),u(t_1))\right]+o(\varepsilon)$

Обозначим $\varphi(V(M,\alpha))=\varphi(M)+\alpha\cdot f(x(t_1),u(t_1))$.

$\widetilde{K}=\left\{\varphi(V(M,\alpha)), M\in \mathrm{M}, \alpha\in\Re\right\}$ - расширенный конус касательных направлений ко множеству достижимости в т. $x(t_1)$.

Справедливы формулы:

1. $V(M_1,\alpha_1)+V(M_2,\alpha_2)=V(M_1+M_2,\alpha_1+\alpha_2)$
2. $\lambda V(M,\alpha)=V(\lambda M,\lambda\alpha), \lambda\geq 0$

Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального управления с интегральным функционалом

Рассмотрим систему

(1) $\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = \bar{x}_1 \\ J = \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x,u)dt \to \min\limits_{u(\cdot)\in D_U} \end{cases}$, где $f(x,u)$ и $f^0(x,u)$ - непрерывны по совокупности переменных в $\Re^n \times \overline{U}$, $\exists \frac{\partial f(x,u)}{\partial x}, \frac{\partial f^0(x,u)}{\partial x}$ - непрерывны по совокупности переменных в $\Re^n \times \overline{U}$.

Введем эквивалентную формулировку этой задачи с более лучшими свойствами.

Новая переменная x^0 и новое уравнение для нее: $\dot{x}^0 = f^0(x,u)$

Тогда $\widetilde{x} = (x^0, x_1, ..., x_n) \in \Re^{n+1}$

$\widetilde{f} = (f^0, f_1, ..., f_n) \in \Re^{n+1}$

$x^0(t) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x(s),u(s))ds \Rightarrow J = x^0(t_1)$

(2) $\begin{cases} \dot{\widetilde{x}} = \widetilde{f}(x,u) \\ \widetilde{x}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \end{pmatrix} \\ \widetilde{x}(t_1) \in \Pi = \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{x}_1 \end{pmatrix}, \xi \in \Re \right\} \\ x^0(t_1) \to \min\limits_{u(\cdot)\in D_U} \end{cases}$, где

Π - прямая, параллельная оси x^0 и проходящая через точку $\bar{x}_1$.

$\widetilde{X}(t)$ - множество достижимости задачи (2).

Если есть решение $x(t)$ задачи (1), то мы можем найти решение $\widetilde{x}(t) = \begin{pmatrix} x^0(t) \\ x(t) \end{pmatrix}$ задачи (2), и наоборот.

Теорема: Пусть пара $(u_*(t), x_*(t))$ - оптимальная пара в задачах (1) и (2). Тогда точка $\widetilde{x}_*(t_1) \in \partial\widetilde{X}(t_1)$ - граница расширенного множества достижимости.

Лемма 1: Если в конечный момент времени траектория $x(t_1) \in \partial X(t_1)$, то $0 \in \partial K$.

Лемма 2: $(\widetilde{u}(t), \widetilde{x}(t)), t \in [t_0, t_1]$ **-** оптимальная пара. Тогда отрицательное направление оси $x^0 \notin \operatorname{int} \widetilde{K}$.

Доказательство:

Симплекс:

В $\Re^n$ рассматриваются *n+1* точка: $a_1, ..., a_{n+1} : a_2 - a_1, a_3 - a_1, ..., a_{n+1} - a_1$ - линейно независимые. $\mathrm{T}^{\mathrm{n}} = \left\{ \mathrm{a} \in \Re^{\mathrm{n}} : a = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i \cdot a_i; \lambda_i \geq 0 \forall i, \sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}$ - *n*-мерный симплекс.

$\Pi = conv\{a_1, ..., a_{n+1}\}$-выпуклая оболочка, натянутая на вектора $a_1, ..., a_{n+1}$.

Буде доказывать от противного. В гиперплоскости $\Re^n$ выбираем симплекс $a_1,...,a_{n+1}$ с центром O.

χ - оператор проектирования в $\Re^n$ в направлении оси x^0.

Параллельно переместим этот симплекс в направлении отрицательной полуоси x^0 на величину $h>0$. Получим новый симплекс с вершинами $b_1=\begin{pmatrix}-h\\ a_1\end{pmatrix},...,b_{n+1}=\begin{pmatrix}-h\\ a_{n+1}\end{pmatrix}$, лежащими в конусе $\widetilde{K}$ и $a_i=\chi(b_i)$.

Для каждой вершины b_i выбираем такую вариацию $V(M_i,\alpha_i)$, что $b_i=\varphi(V(M_i,\alpha_i))$.

Тогда $b=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\cdot b_i=\varphi(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\cdot V(M_i,\alpha_i))=\begin{pmatrix}-h\\ \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\cdot a_i\end{pmatrix}$. Таким образом точке b поставлена в соответствие вариация $V(M,\alpha)=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\cdot V(M_i,\alpha_i)=V(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\cdot M_i,\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\cdot\alpha_i)$.

При этом конец вариации соответствующей траектории $\widetilde{x}^*(t_1^*)=\widetilde{x}(t_1)+\varepsilon\cdot b+o(\varepsilon)$.

Тогда отображение $f_\varepsilon:T^n\to\Re^n$,

$f_\varepsilon(a)=\dfrac{\chi(\widetilde{x}^*(t_1^*)-\widetilde{x}(t_1))}{\varepsilon}=\dfrac{\varepsilon\cdot a+o(\varepsilon)}{\varepsilon}=a+\dfrac{o(\varepsilon)}{\varepsilon},\varepsilon>0$ непрерывно и равномерно стремится к 0 при $\varepsilon\to 0$. Т. к. $0\in\operatorname{int}T^n\Rightarrow 0\in f_\varepsilon(T^n)$.

Следовательно, $\exists V(M_*,\alpha_*):\chi(\widetilde{x}^*(t_1^*)-\widetilde{x}(t_1))=0$. При этом

$\widetilde{x}^{*0}(t_1^*)-\widetilde{x}^0(t_1)=-\varepsilon\cdot h+o(\varepsilon)\Rightarrow\widetilde{x}^{*0}(t_1^*)<\widetilde{x}^0(t_1)$, т.е. нашли более оптимальную траекторию, для которой функционал имеет меньшее значение. Противоречие.■

Теорема (Необходимое условие выхода на границу множества достижимости): Пусть $(u(t),x(t)),t\in[t_0,t_1]$ и $x(t_1)\in\partial X(t_1)$. Тогда

$\exists\psi(t)\neq 0;\dot{\psi}=-\dfrac{\partial\mathrm{H}(x,\psi,u)}{\partial x}=-\left(\dfrac{\partial f(x(t),u(t))}{\partial x}\right)^*\psi$, где

$\mathrm{H}(x,\psi,u)=\langle f(x,u),\psi\rangle=\sum_{i=1}^{n}f^i(x,u)\cdot\psi_i$, ψ -сопряженная переменная. И выполнен принцип максимума: $\mathrm{H}(x(t),\psi(t),u(t))=\max_{v\in U}\mathrm{H}(x(t),\psi(t),v)=M(t),\forall t\in[t_0,t_1]$ и

$M(t)=const,\forall t\in[t_0,t_1]$.

(В теоремах Н и H различны).

ПМП Понтрягина – необходимое условие оптимальности в задаче с интегральным функционалом:

Введем $H(x,\widetilde{\psi},u)=\langle\widetilde{\psi},\widetilde{f}(x,u)\rangle=\sum_{i=0}^{n}\psi_i\cdot f^i(x,u)$.

$(x(t),u(t)),t\in[t_0,t_1]$ - оптимальная пара задач (1), (2). Тогда $\exists\widetilde{\psi}(t)\neq 0$, которое есть решение следующей сопряженной задачи $\dot{\widetilde{\psi}}=-\dfrac{\partial H}{\partial\widetilde{x}};\dot{\psi}_i=-\dfrac{\partial H_i}{\partial x},i=\overline{0,n}$ (расширенная сопряженная система) такая, что:

1) выполняется принцип максимума $H(x(t),\widetilde{\psi}(t),u(t))=\max_{v\in U}(H(x(t),\widetilde{\psi}(t),v))=M(x,\psi),t\in[t_0,t_1]$
2) $M(x(t),\psi(t))=const,\psi_0(t)=const,\forall t\in[t_0,t_1]$

3) $\psi_0(t_1) \le 0,\ M(x(t_1), \psi(t_1)) = 0$

Доказательство:

1) $(x(t), u(t))$ - оптимально.

$L = \left\{ \lambda \in \Re^1_+, (-\lambda, 0, ..., 0), \lambda \ge 0 \right\}$ - отрицательное направление оси x^0 и $L \not\subset \operatorname{int} \widetilde{K}$ по лемме 2. Следовательно, L и $\widetilde{K}$ отделимы гиперплоскостью с координатами $\psi_1, ..., \psi_n$, причем знак их выбран так что конус лежит в отрицательном полупространстве этой гиперплоскости, а L - в положительной части.

Пусть M – некоторая вариация Макшейна и α –некоторое действительное число, такие что, применяя вариацию $V(M, \alpha)$ получаем управление $u_*(t)$ для которого $\varphi(V(M, \alpha)) = \varphi(M) + \alpha \cdot \widetilde{f}(x(t_1), u(t_1))$ лежит в конусе $\widetilde{K}$.

$$\forall \widetilde{y} \in \widetilde{K} \ \ \langle p, \widetilde{\psi} \rangle \ge \langle \widetilde{y}, \widetilde{\psi} \rangle, \text{ где } p = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} \in L. \text{ В силу } 0 \in L \Rightarrow \langle \widetilde{y}, \widetilde{\xi} \rangle = \langle \widetilde{y}, \widetilde{\psi}(t_1) \rangle \le 0$$

Следовательно, $\langle \varphi(V(M, \alpha)), \widetilde{\psi} \rangle \le 0.$

Переносим вектор $\widetilde{\psi}$ из момента времени t_1 в момент времени t, являющийся точкой непрерывности управления $u(t)$. Получаем $\langle \sigma \cdot (f(x(t), v) - f(x(t), u(t))), \widetilde{\psi} \rangle \le 0$. Переписывая формулу в терминах функции H, получаем ПМП.

2) $\dot{\psi}_0 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_0} = 0$, т.к. H - не зависит от x_0.

Сначала доказывается, что M – непрерывна, а далее показывают, что $\dfrac{dM}{dt} = 0$.

$$\textbf{3)}\ 0 \in \widetilde{K}, p_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} \in L$$

$$\langle \widetilde{p}_0, \widetilde{\psi}(t_1) \rangle \ge 0 \Rightarrow \psi_0(t_1) \le 0$$

$$\alpha \cdot \widetilde{f}(x(t_1), u(t_1)) \in \widetilde{K} \Rightarrow \left\langle \alpha \cdot \widetilde{f}(x(t_1), u(t_1)), \widetilde{\psi}(t_1) \right\rangle \le 0$$

$$\text{при } \alpha \le 0: \left\langle \widetilde{f}(x(t_1), u(t_1)), \widetilde{\psi}(t_1) \right\rangle \le 0$$

$$\text{при } \alpha > 0: \left\langle \widetilde{f}(x(t_1), u(t_1)), \widetilde{\psi}(t_1) \right\rangle \ge 0 \Rightarrow$$

$$0 = \left\langle f(x(t_1), u(t_1)), \widetilde{\psi}(t_1) \right\rangle = H(x(t_1), \widetilde{\psi}(t_1), u(t_1)) = M(x(t_1), \widetilde{\psi}(t_1)) = 0 \Rightarrow 3)$$

Ч. Т.Д.

Понятие о методе динамического программирования

Рассмотрим на примере задачи быстродействия

$$(\mathrm{P})\begin{cases}\dot{x}=f(x,u)\\ x(t_0)=x_0\\ x(t_1)=x_1\\ t_1-t_0\to\min\limits_{u(\cdot)\in D_U}\end{cases}$$

Проведем метод погружения. Введем параметр $\alpha=x_0$. Получим

$$(P_\alpha)\begin{cases}\dot{x}=f(x,u)\\ x(t_0)=\alpha\\ x(t_1)=x_1-\text{зафиксируем}\\ t_1-t_0\to\min\limits_{u(\cdot)\in D_U}\end{cases}$$

Таким образом, $T(\alpha)=\min\limits_{x\in X(\alpha)}(t_1-t_0)$ - определена на множестве всех точек пространства *X*, из которых возможен оптимальный переход в точку x_1.

Обозначим $T(\alpha)=T(x),\alpha=x$ и $V(\alpha)=-T(\alpha)$.

Предположение 1:

$\forall x\in E^n\ \ \exists T(x)\ \ T(x)>0,\forall x\neq x_1$, $T(x_1)=0$, *T(x)* непрерывна в E^n, $V(x)=-T(x)<0$

Предположение 2:

Функция Беллмана $V(x)$ дифференцируема (редко выполняется) в $E^n\setminus\{x_1\}$.

Должен выполняться принцип оптимальности: любой кусок оптимальной траектории оптимален. Покажем это:

$(x(t),(u(t)),t\in[t_0,t_1]$ - оптимальная пара

Возьмем $\forall\tau\in(t_0,t_1)$. Рассмотрим $x(\tau)$.

Предположим $\exists\hat{u}(t):\hat{x}(t)|_{t=\tau}=x(\tau)$

$t\in[\tau,\hat{t}_1]$ и $\hat{x}(t)|_{t=\hat{t}_1}=x_1$

$\hat{t}_1<t_1$ -предполагаем, что хвост не оптимален.

Построим $u_*(t)=\begin{cases}u(t),t\in[t_0,\tau]\\ \hat{u}(t),t\in(\tau,\hat{t}_1]\end{cases}$. Получим, что новая траектория $x_*(t)|_{t=t_0}=x_0$ и $x_*(t)|_{t=\hat{t}_1}=x_1$. Но это противоречит оптимальности $(x(t),(u(t))$.■

Принцип оптимальности обозначает, что $T(x(t))=\Delta t+T(x(t+\Delta t)),\Delta t>0;t,t+\Delta t\in[t_0,t_1)$.

$\Delta t=V(x(t+\Delta t))-V(x(t))$

$$1=\frac{V(x(t+\Delta t))-V(x(t))}{\Delta t},\Delta t\to 0$$

t - точка непрерывности управления $u(t)$

$$1=\frac{d}{dt}V(x,t)=\left\{V'(x)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial V(x)}{\partial x_1}\\ \dots\\ \dfrac{\partial V(x)}{\partial x_n}\end{pmatrix}\right\}=\langle V'(x(t)),\dot{x}\rangle=\langle V'(x(t)),f(x(t),u(t)\rangle,\forall t\in[t_0,t_1]\ (1)$$

$t\to t_0\langle V'(x_0),f(x_0,u(t_0)\rangle,\forall x_0\in E^n$

Через бесконечно малый промежуток времени $\left[t_0, t_0 + \Delta t\right]$ $\overline{u}(t) = v \in U$

$y(t)|_{t=t_0} = x_0,$

$T(x_0) \le \Delta t + T(y(t_0 + \Delta t)$

$\frac{V(y(t_0 + \Delta t) - V(x_0)}{\Delta t} \le 1$

$y(t_0 + \Delta t) = y(t_0) + y(t_0)\Delta t + o(\Delta t) = x_0 + f(x_0, v)\Delta t + o(\Delta t)$

$\left\langle V'(x_0), f(x_0, v) \right\rangle \le 1, \forall x_0, \forall v \in U$

(2) $\begin{cases} \max\limits_{v \in U} \left\langle V'(x), f(x, v) \right\rangle = 1 \\ V(x_1) = 0 \end{cases}$ - уравнение Беллмана

Теорема 1(Принцип оптимальности Беллмана):

В предположении 1, 2 функция Беллмана удовлетворяет уравнению (2).
На любой оптимальной паре выполнено (1).

Теорема 2:

Пусть $V(x)$ удовлетворяет условиям: $\forall x \ne x_1$

1) определена и непрерывна на $\forall x \in E^n, V(x) < 0, V(x_1) = 0$
2) $\exists V'(x), x \in E^n \setminus \left\{x_1\right\}$
3) $V(x)$ удовлетворяет условию Беллмана (2)

Пусть $(x(t), u(t))$ - допустимая пара в задаче быстродействия.

$x(t_0) = x_0$

$x(t_1) = x_1$

$x(t) \ne x_1, \forall t \in \left[t_0, t_1\right)$

$\left\langle V'(x(t)), f(x(t), u(t) \right\rangle = 1, \forall t \in \left[t_0, t_1\right)$

$\Rightarrow (x(t), u(t)) -$ î ï ò èì àëüí î $: T(x_0) = -V(x_0)$

Доказательство:

$$-V(x_0) = V(x_1) - V(x_0) = V(x(t))|_{t=t_0}^{t=t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} V(x(t))dt =$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\langle V'(x(t)), f(x(t), u(t)) \right\rangle dt = \int_{t_0}^{t_1} 1 dt = t_1 - t_0 = T(x_0)$$

Покажем, что время перехода по любой другой траектории неменьше, чем мы предполагаем.

$(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$ -любая допустимая пара $\forall t \in \left[t_0, \hat{t}_1\right)$

$\hat{x}(t_0) = x_0$

$\hat{x}(\hat{t}_1) = x_1$

$\hat{x}(t) \ne x_1, \forall t \in \left[t_0, \hat{t}_1\right)$

Можно записать:

$$t_1 - t_0 = -V(x_0) = V(x_1) - V(x_0) = V(\hat{x}(t))\Big|_{t=t_0}^{t=\hat{t}_1} =$$

$$\int_{t_0}^{\hat{t}_1} \frac{d}{dt} V(\hat{x}(t))dt = \int_{t_0}^{\hat{t}_1} \left\langle V'(\hat{x}(t)), f(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) \right\rangle dt$$

$$\le \int_{t_0}^{\hat{t}_1} \max_{v \in U} \left\langle V'(\hat{x}(t)), f(\hat{x}(t), v) \right\rangle dt = \int_{t_0}^{\hat{t}_1} 1 dt = \hat{t}_1 - t_0$$

Ч. Т. Д.

При решении задач мы ищем $V(x)$: $\begin{cases} \max\limits_{v \in U} \left\langle V'(x), f(x, v) \right\rangle = 1 \\ V(x_1) = 0, V(x) < 0 \end{cases}$

И далее $u(x) = \arg \max\limits_{u \in U} \left\langle V'(x), f(x, u) \right\rangle$ - управление в форме синтеза.

Определение. Линейное пространство $\mathbf{M}$ называется *метрическим*, если на нём задано отображение $\rho: \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbb{R}^1_+$, называемое *метрикой* и удовлетворяющее трём аксиомам:

1) $\rho(u, v) = \rho(v, u) \quad \forall u, v \in \mathbf{M}$ (симметричность);

2) $\rho(u + v, w) \leqslant \rho(u, w) + \rho(v, w) \quad \forall u, v, w \in \mathbf{M}$ (неравенство треугольника);

3) $\rho(u, v) \geqslant 0 \; \forall u, v \in \mathbf{M}$, $\rho(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$ (неотрицательность).

Упражнение 1 (3). Привести примеры функций, не достигающих inf на замкнутом, но не ограниченном множестве и ограниченном, но незамкнутом множестве.

Определение. Последовательность $\{u_k\}$ *сходится по метрике* ρ ($u_k \xrightarrow{\rho} u$) в метрическом пространстве $\mathbf{M}$, если $\rho(u_k, u) \to 0$ при $k \to \infty$.

В дальнейшем в метрических пространствах если $u_k \xrightarrow{\rho} u$, то будем говорить, что последовательность $\{u_k\}$ сходится к u, а u будем называть пределом $\{u_k\}$.

Определение. Последовательность $\{u_k\}$ называется *фундаментальной*, если

$$\rho(u_i, u_j) \to 0 \text{ при } i, j \to \infty.$$

Определение. Метрическое пространство $\mathbf{M}$ называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность в этом пространстве сходится к элементу из $\mathbf{M}$.

Примеры полных пространств:

1. $\mathbf{M} = \mathbb{R}^n$ — метрическое пространство с метрикой

$$\rho(u, v) = \|u - v\|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i)^2};$$

2. $\mathbf{M} = \mathbf{C}[a, b]$ — множество непрерывных на $[a, b]$ функций — метрическое пространство с метрикой
$$\rho(f, g) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - g(x)|.$$

Определение. Функция $J(u)$ называется *непрерывной* [*полунепрерывной снизу*] (*полунепрерывной сверху*) в точке u_0, если для любой, сходящейся к u_0 последовательности элементов $\{u_k\}$ из $\mathbf{U}$ существует предел $\lim\limits_{k \to \infty} J(u_k) = J(u_0)$ $\left[\varliminf\limits_{k \to \infty} J(u_k) \geqslant J(u_0)\right]$ $\left(\varlimsup\limits_{k \to \infty} J(u_k) \leqslant J(u_0)\right)$ (см. рис. 1.)

Определение. Множество $\mathbf{U}$ называется *компактным* (*ρ-компактом*) в $\mathbf{M}$, если у любой последовательности $\{u_k\}$ из $\mathbf{U}$ существует сходящаяся к элементу из $\mathbf{U}$ подпоследовательность $\{u_{k_m}\}$.

Замечание. В конечномерном пространстве ($\mathbb{R}^n$) множество $\mathbf{U}$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

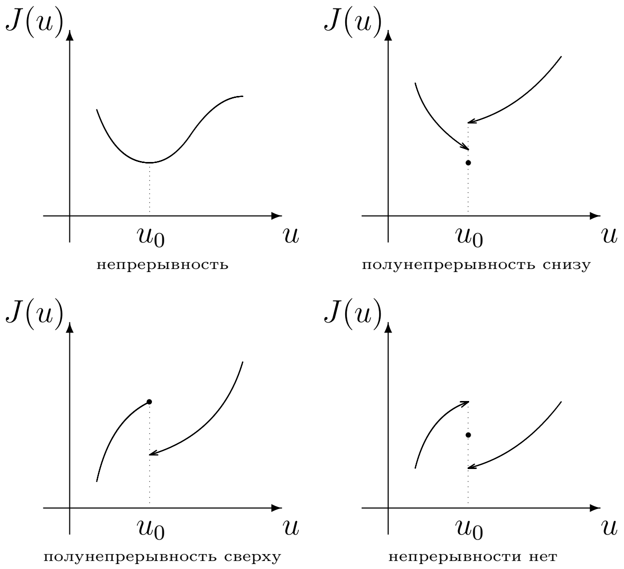


Рис. 1: к определению видов непрерывности.

Введём ряд обозначений:

$$\inf_{u\in\mathbf{U}} J(u) = J_*, \quad \sup_{u\in\mathbf{U}} J(u) = J^*;$$

$$\mathbf{U}_* = \{v \in \mathbf{U} | J(v) = J_*\};$$

$$u_* = \operatorname*{argmin}_{u\in\mathbf{U}} J(u) \in \mathbf{U}_*.$$

Теорема 1. ***(метрический вариант теоремы Вейерштрасса)***
Пусть $\mathbf{M}$ *— метрическое пространство, множество* $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{M}$ *— компакт, функция* $J(u)$ *полунепрерывна снизу на* $\mathbf{U}$*. Тогда:*

1) $J_* > -\infty$*;*

2) $\mathbf{U}_* \neq \varnothing$*;*

3) из того, что $\left\{ \begin{array}{l} J(u_k) \to J_* \text{ при } k \to \infty, \\ u_k \in \mathbf{U} \end{array} \right.$ *следует, что* $\rho(u_k, \mathbf{U}_*) \to 0$.

Доказательство.

По определению точной нижней грани J_* (которая в общем случае может равняться и $-\infty$) существует последовательность $\{u_k\} \subseteq \mathbf{U}$ такая, что $J(u_k) \to J_*$ при $k \to \infty$. Так как $\mathbf{U}$ — компакт, то у этой последовательности существует подпоследовательность $\{u_{k_m}\}$ такая, что $u_{k_m} \to u \in \mathbf{U}$ при $m \to \infty$. Тогда из полунепрерывности $J(u)$ снизу в этой точке u следует, что

$$-\infty < J(u) \leqslant \varliminf_{m\to\infty} J(u_{k_m}) = \{\text{т.к. } \{u_{k_m}\} \text{ п/п-ть } \{u_k\}\} = \lim_{k\to\infty} J(u_k) = J_*.$$

Таким образом, J_* конечно ($J_* > -\infty$).

Из того, что $u \in \mathbf{U}$ и $J(u) \leqslant J_*$ следует, что $u \in \mathbf{U}_* \neq \varnothing$. Следовательно $\mathbf{U}_* \neq \varnothing$.

Докажем теперь третье утверждение от противного. Предположим, что существует подпоследовательность $\{u_{k_m}\}$ такая, что $\rho(u_{k_m}, \mathbf{U}_*) \geqslant \rho_0 > 0$. Так как $\mathbf{U}$ — компакт, то у этой подпоследовательности существует "подподпоследовательность" $\{u_{k_{m_l}}\}$ такая, что $\rho(u_{k_{m_l}}, u) \overset{l\to\infty}{\to} 0$ для некоторого u ($u \in \mathbf{U}$). Отсюда, с учётом полунепрерывности $J(u)$ снизу, имеем:

$$J(u) \leqslant \varliminf_{l\to\infty} J(u_{k_{m_l}}) = \lim_{k\to\infty} J(u_k) = J_*.$$

То есть для точки $u \in \mathbf{U}_*$

$$\rho(u_{k_{m_l}}, \mathbf{U}_*) = \inf_{u_* \in \mathbf{U}_*} \rho(u_{k_{m_l}}, u_*) \leqslant \rho(u_{k_{m_l}}, u) \to 0 \text{ при } l \to \infty.$$

Полученное противоречие (подпоследовательность сходится к нулю, тогда как сама последовательность отделена от нуля положительным ρ_0) завершает доказательство третьего утверждения. Теорема полностью доказана. $\square$

Определение. Задачи, удовлетворяющие условиям (выводам) Теоремы 1 называют *корректно поставленными* в метрическом пространстве $\mathbf{M}$.

Упражнение 2 (3). Доказать, что в $\mathbf{C}[a,b]$ единичный шар $\mathbf{U} = \{\|f\|_{\mathbf{C}} \leqslant 1\}$ является замкнутым и ограниченным множеством, но при этом компактом не является.

Пример. (когда множество $\mathbf{U}$ не компакт и Теорема 1 не применима)

$$\mathbf{M} = \mathbf{C}[-1,1], \rho(f,g) = \max_{-1\leqslant t\leqslant 1} |f(t) - g(t)| = \|f-g\|_{\mathbf{C}}, \mathbf{U} = \{\|f\|_{\mathbf{C}} \leqslant 1\},$$

$$J(f) = \int_{-1}^{0} f(t)\,dt - \int_{0}^{1} f(t)\,dt.$$

$\mathbf{U}$ ограничено и замкнуто, но не является компактом (см. Упражнение 2); $J(u)$ — непрерывен:

$$|J(f) - J(g)| \leqslant \int_{-1}^{0} |f(t) - g(t)|\,dt + \int_{0}^{1} |f(t) - g(t)|\,dt \leqslant 2\cdot\|f-g\|_{\mathbf{C}}$$

(то есть даже Липшиц-непрерывен с константой 2). Но в тоже время минимум функционала $J(u)$ равен $J_* = -2 = J(u_*)$ и, как легко видеть, достигается на функции (см. рис. 2):

$$u_*(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant t < 0 \\ 1 & 0 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

которая, очевидно, не принадлежит классу $\mathbf{C}[-1,1]$, то есть множество $\mathbf{U}_*$ пусто.

Пример. (когда множество $\mathbf{U}$ не компакт, но inf достигается)

Возьмём в предыдущем примере в качестве функционала $J(f) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)\,dt$. Тогда $J_* = -2$, $\mathbf{U}_* = \{u_*\} \neq \varnothing$, $u_* = u_*(t) \equiv -1 \in \mathbf{U}$.

Определение. Линейное пространство L называется *нормированным*, если существует такая функция $\|u\| : \mathbf{L} \to \mathbb{R}^1_+$, называемая *нормой*, что:

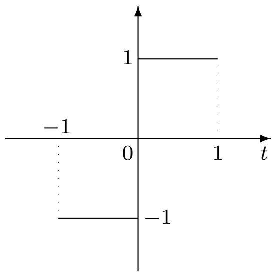


Рис. 2: $u_*(t)$

1) $\|\alpha u\| = |\alpha|\cdot\|u\| \quad \forall u \in \mathbf{L}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (неотрицательная однородность);

2) $\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in \mathbf{L}$ (неравенство треугольника);

3) $\|u\| \geqslant 0 \ \forall u \in \mathbf{L},\ \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (неотрицательность).

Если в пункте 3) выполнено лишь условие $u = 0 \Rightarrow \|u\| = 0$, то $\|u\|$ называют *полунормой.*

Определение. Нормированное линейное пространство $\mathbf{L}$, полное относительно метрики $\rho(u,v) = \|u - v\|$, называется *бáнаховым.*

Определение. Линейное пространство $\mathbf{L}$ называется *евклидовым*, если на нём задано *скалярное произведение* $\langle u, v\rangle : \mathbf{L} \times \mathbf{L} \to \mathbb{R}^1$:

1) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle \quad \forall u, v \in \mathbf{L}$ (симметричность);

2) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \quad \forall u, v, w \in \mathbf{L}$ (линейная аддитивность);

3) $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha \langle u, v\rangle \quad \forall u, v \in \mathbf{L}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (линейная однородность);

4) $\langle u, u\rangle \geqslant 0,\ \langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (неотрицательность).

В любом евклидовом пространстве $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ является нормой (*евклидовой нормой*), а $\rho(u,v) = \|u - v\|$ — метрикой.

Определение. Евклидово пространство $\mathbb{H}$, полное относительно метрики

$$\rho(u,v) = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle_{\mathbb{H}}},$$

называется *гúльбертовым.* В дальнейшем буквой $\mathbb{H}$ будем обозначать гильбертовы пространства.

Упражнение 3 (3). Доказать, что $\mathbf{C}[a,b]$ является евклидовым пространством со скалярным произведением $\langle u, v\rangle = \int\limits_a^b u(t)v(t)\,dt$, но не является гильбертовым.

Пример. (ограниченное замкнутое множество в гильбертовом бесконечномерном пространстве, не являющееся компактом)

Рассмотрим единичный шар $\mathbf{U} = \{u \in \mathbb{H} : \|u\|_{\mathbb{H}} \leqslant 1\}$. Возьмём любую ортонормированную систему $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ (здесь важен факт бесконечномерности пространства). Так как норма e_k равна единице, то $e_k \in \mathbf{U}$. В случае, когда $k \neq m$, имеем:

$$\|e_k - e_m\|^2_{\mathbb{H}} = \langle e_k - e_m, e_k - e_m\rangle = 1 - 2\langle e_k, e_m\rangle + 1 = 2.$$

Отсюда следует, что последовательность $\{e_k\}$ не является фундаментальной, следовательно, никакая её подпоследовательность также не является фундаментальной.

Примеры гильбертовых пространств:

1. $\mathbb{H} = \mathbb{R}^n$, $\langle u, v\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i v_i$;

2. $\mathbb{H} = \mathbf{l}^2$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$, $u \in \mathbf{l}^2 \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2 < \infty$, $\langle u, v\rangle = \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i v_i$;

3. $\mathbb{H} = \mathbf{L}^2(a, b)$ — замыкание класса $\mathbf{C}[a, b]$ по норме $\|u\|_{\mathbf{L}^2} = \sqrt{\int\limits_a^b |u(t)|^2\,dt}$ является гильбертовым пространством. (Возможно альтернативное определение класса $\mathbf{L}^2$: множество измеримых по Лебегу на (a, b) функций $f(t)$ таких, что $f^2(t)$ интегрируемы на (a, b) по Лебегу).

Определение. Последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{H}$ называется *слабо сходящейся* к элементу $u_0 \in \mathbb{H}(u_k \overset{\text{слабо}}{\to} u_0)$, если $\forall h \in \mathbb{H}\ \langle u_k, h\rangle_{\mathbb{H}} \to \langle u_0, h\rangle_{\mathbb{H}}$ при $k \to \infty$.

Замечание. Из сходимости в метрике $\mathbb{H}$ следует слабая сходимость, но не наоборот.

$\Rightarrow$

$$\|u_k - u_0\|_{\mathbb{H}} \to 0 \Rightarrow \forall h\ |\langle u_k, h\rangle_{\mathbb{H}} - \langle u_0, h\rangle_{\mathbb{H}}| = |\langle u_k - u_0, h\rangle_{\mathbb{H}}| \leqslant$$
$$\leqslant \{\text{нер-во Коши-Буняковского}\} \leqslant \underbrace{\|u_k - u_0\|_{\mathbb{H}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\|h\|_{\mathbb{H}}}_{\text{const}} \to 0;$$

$\not\Leftarrow$ рассмотрим любую ортонормированную систему $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$;

$$\forall h \in \mathbb{H}\ \sum_{k=1}^{\infty} \langle h, e_k\rangle_{\mathbb{H}}{}^2 \leqslant \{\text{нер-во Бесселя}\} \leqslant \|h\|_{\mathbb{H}}^2 < \infty.$$

Необходимым условием сходимости этого ряда является $\langle h, e_k\rangle^2 \to 0$ при $k \to \infty \Rightarrow \langle h, e_k\rangle \to 0 = \langle h, 0\rangle$. Имеем $e_k \overset{\text{слабо}}{\to} 0$, но $\|e_k - 0\|_{\mathbb{H}} = \|e_k\|_{\mathbb{H}} = 1 \nrightarrow 0$. ■

Определение. Множество $\mathbf{U}$ называется *слабо компактным* (*слабым компактом*), если у любой последовательности $\{u_k\}$ из $\mathbf{U}$ существует подпоследовательность $\{u_{k_m}\}$, слабо сходящаяся к точке $u_0 \in \mathbf{U}$.

Замечание. Из того, что множество $\mathbf{U}$ является компактом, следует, что оно является слабым компактом, но не наоборот. Например единичный шар в $\mathbb{H}$ представляет слабый компакт, но компактом не является.

Определение. Функция $J(u)$ называется *слабо непрерывной* (*слабо полунепрерывной снизу*) в точке u_0, если для любой слабо сходящейся к u_0 последовательности $\{u_k\}$ существует предел

$$\lim_{k\to\infty} J(u_k) = J(u_0)$$
$$(\varliminf_{k\to\infty} J(u_k) \geqslant J(u_0))$$

Замечание. Из слабой непрерывности функции $J(u)$ следует её “обычная” непрерывность, но не наоборот.

Теорема 2. ***(слабый вариант теоремы Вейерштрасса)***
Пусть $\mathbb{H}$ *— гильбертово пространство,* $\mathbf{U}$ *— слабый компакт в* $\mathbb{H}$*, функция* $J(u)$ *слабо полунепрерывна снизу на* $\mathbf{U}$*. Тогда:*

1) $J_* > -\infty$*;*

2) $\mathbf{U}_* \neq \varnothing$*;*

3) любая слабая предельная точка любой минимальной последовательности (то есть такой последовательности $\{u_k\}$*, что* $J(u_k) \overset{k\to\infty}{\to} J_*$*) принадлежит множеству* $\mathbf{U}_*$*.*

Доказательство.
Аналогично Теореме 1 (провести самостоятельно). □

Определение. Задачи, удовлетворяющие условиям Теоремы 2 называют *слабо корректно поставленными* в $\mathbf{M}$.

Определение. Множество $\mathbf{U}$ называется *выпуклым*, если точка $\alpha u + (1-\alpha)v$ принадлежит множеству $\mathbf{U}$ для любых u и v из $\mathbf{U}$ и любого α из отрезка $[0,1]$.

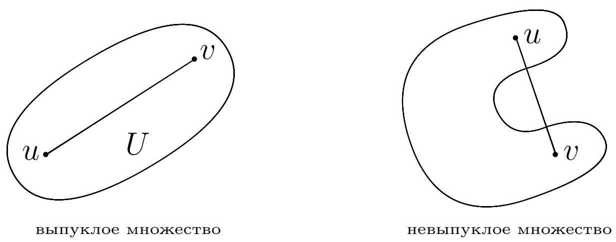


Рис. 3: к определению выпуклости множества

Определение. Функция $J(u)$ называется *выпуклой* на выпуклом множестве $\mathbf{U}$, если для любых точек u и v из множества $\mathbf{U}$ и для любого α из отрезка $[0,1]$ выполняется неравенство $J(\alpha u + (1-\alpha)v) \leqslant \alpha J(u) + (1-\alpha)J(v)$.

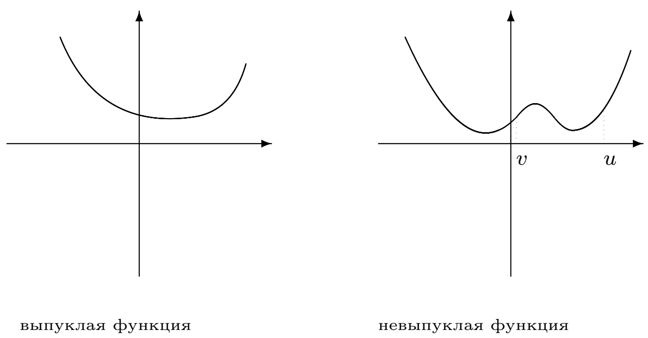


Рис. 4: к определению выпуклости функции

Достаточное условие слабой компактности в $\mathbb{H}$

Если множество $\mathbf{U}$ выпукло, замкнуто и ограничено, то $\mathbf{U}$ слабо компактно (без доказательства).

Достаточное условие слабой полунепрерывности снизу в $\mathbb{H}$

Если функция $J(u)$ выпукла и полунепрерывна снизу на множестве $\mathbf{U}$, то $J(u)$ слабо полунепрерывна снизу на этом множестве (без доказательства).

Приведём несколько примеров.

1) Рассмотрим линейный функционал $J(u) = \langle c, u\rangle_{\mathbb{H}}$, где $c \in \mathbb{H}$. Он является слабо непрерывным, что следует из определения слабой сходимости.

2) Рассмотрим квадратичный функционал $J(u) = \|Au - f\|^2_{\mathbf{F}}$, где $A \in \mathbf{L}(\mathbb{H} \to \mathbf{F})$ — линейный ограниченный (непрерывный) оператор; $\mathbb{H}, \mathbf{F}$ — гильбертовы пространства; $f \in \mathbf{F}$.

   Покажем выпуклость и непрерывность (а как следствие и полунепрерывность снизу) функционала $J(u)$, тем самым, согласно достаточному условию, мы докажем его слабую полунепрерывность снизу.

   a) (выпуклость) Для любых $v, u \in \mathbf{U}$ и любого α из отрезка $[0, 1]$ имеем:

   $$\|A(\alpha u + (1-\alpha)v) - f\|^2_{\mathbf{F}} = \{\text{т.к. } A \text{ -линейный}\} =$$
   $$= \|\alpha(Au - f) + (1-\alpha)(Av - f)\|^2_{\mathbf{F}} \leqslant \{\text{неравенство } \triangle\} \leqslant$$
   $$\leqslant (\alpha\|Au - f\|_{\mathbf{F}} + (1-\alpha)\|Av - f\|_{\mathbf{F}})^2 \leqslant \{\text{т.к. функция } y = x^2 \text{ выпуклая}\} \leqslant$$
   $$\leqslant \alpha\|Au - f\|_{\mathbf{F}} + (1-\alpha)\|Av - f\|_{\mathbf{F}}$$

   что и требовалось.

   b) (непрерывность) Пусть $u_k \overset{\text{в } \mathbb{H}}{\to} u$ при $k \to \infty$, тогда, так как A — непрерывный, $Au_k - f \overset{\text{в } \mathbf{F}}{\to} Au - f$. Отсюда в силу непрерывности $\|\cdot\|$ (неравенство Коши-Буняковского) следует, что $\|Au_k - f\|_{\mathbf{F}} \to \|Au - f\|_{\mathbf{F}}$, то есть непрерывность функционала $J(u)$.

   Замечание. Функционал $J(u) = \|u\|^2$ $(A = I, f = 0, H = F)$ слабо полунепрерывен снизу, но не является слабо непрерывным. (для любой ортонормированной системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ $e_n \overset{\text{слабо}}{\to} 0$ при $n \to \infty$, но $\|e_n\|^2 = 1 \neq 0$).

3) Докажем, что множество $\mathbf{U} = \{u \in \mathbb{H} \mid \|Au - f\|^2_{\mathbf{F}} \leqslant R^2\}$, где $\mathbb{H}$, $\mathbf{F}$ — гильбертовы пространства, A — обратимый оператор, действующий из $\mathbb{H}$ в $\mathbf{F}$, $f \in \mathbf{F}$, $R > 0$ (невырожденный эллипсоид), является слабым компактом. Для этого воспользуемся достаточным условие слабой компактности. Доказательство выпуклости и замкнутости множества $\mathbf{U}$ не представляет особого труда (сделать самостоятельно). Докажем его ограниченность:

   $$\forall u \in \mathbf{U} \quad \|u\| = \|A^{-1}Au\| = \|A^{-1}(Au - f) + A^{-1}f\| \leqslant \{\text{неравенство } \triangle\} \leqslant$$
   $$\leqslant \|A^{-1}(Au - f)\| + \|A^{-1}f\| \leqslant \|A^{-1}\|{\cdot}\|Au - f\| + C \leqslant$$

$$\leqslant C_1 {\cdot} \|Au - f\| + C \leqslant C_1 R + C \equiv const$$

что и требовалось.

Замечание. Шар $\mathbf{U} = \{\|u\| \leqslant R\}$ $(A = I, f = 0)$ представляет собой слабый компакт, но компактом не является.

4) Рассмотрим "параллелепипед" в $\mathbf{L}^2(a,b)$, то есть множество

$$\mathbf{U} = \{u(t) \in \mathbf{L}^2(a,b) \mid \alpha(t) \overset{\text{п.в.}}{\leqslant} u(t) \overset{\text{п.в.}}{\leqslant} \beta(t),\, t \in (a,b)\},$$

$\alpha(t)$, $\beta(t) \in \mathbf{L}^2(a,b)$ заданы (например, константы).

   a) Докажем ограниченность $\mathbf{U}$:

$$\|u\|^2_{\mathbf{L}^2} = \int\limits_a^b |u(t)|^2\, dt \leqslant \int\limits_a^b (\max\{|\alpha(t)|, |\beta(t)|\})^2\, dt \equiv R^2$$

   (здесь мы учитывали, что функция $\max\{|\alpha(t)|, |\beta(t)|\} \in \mathbf{L}^2(a,b)$).

   b) Замкнутость $\mathbf{U}$ следует из свойств интеграла Лебега (см., например, [КФ, гл.VII, §2,п.5])

   c) Доказательство выпуклости $\mathbf{U}$ предоставляется сделать самостоятельно.

Из пунктов a),b),c) следует, что "параллелепипед" в $\mathbf{L}^2(a,b)$ есть слабый компакт.

Упражнение 4 (3). Доказать, что "параллелепипед" в $\mathbf{L}^2(a,b)$ не является компактом.

Опр 1. Множество F - открытое, если $\forall x \in F, \exists \varepsilon < 0 : S_{\varepsilon}(x) \in F$

Опр 2. Точка a - предельная, если $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow S_{\varepsilon}(a) \cap F \neq \varnothing$

Опр 3. Множество F замкнуто, если оно содержит все свои предельные точки.

Опр 4. Множество F ограничено, если $\exists R > 0 : F \subset S_R(0)$

Опр 5. Модулем множества называется число $|F| = \sup\limits_{f \in F} \| f \| = \inf\limits_{r>0} \{ r : F \subset S_r(0) \}$

Опр 6. F - компакт, если F ограниченное, замкнутое множество

Опр 7. $\Omega(E^n)$ - множество непустых компактов пространства E^n

Опр 8. $\forall x, y \in E^n$ отрезком $[x, y] = \{ z \in E^n : z = \lambda x + (1-\lambda) y, \lambda \in [0,1] \}$

Опр 9. F - выпуклое если $\forall x, y \in F \Rightarrow [x, y] \in F$

Опр 10. $\operatorname{conv}\Omega(E^n)$ - множество непустых выпуклых компактов пространства E^n

Опр 11. Множество G называется выпуклой оболочкой множества F, если G - выпукло и $G \supset F$.

Опр 12. Множество H называется минимальной выпуклой оболочкой множества F, если 1) H - выпуклая оболочка 2) $\forall$ выпуклой оболочки G множества F $\Rightarrow G \supset F$.
Обозначение $G = \operatorname{conv} F$.

Опр 13. Опорной функцией множества F называется функция $C(F, \psi) = \sup\limits_{f \in F} (f, \psi)$,

причем для $\forall F$ - ограничен $\Rightarrow$
$\forall \psi \in E^n, \|(f, \psi)\| \leq \|f\| \cdot \|\psi\| \Rightarrow (f, \psi) \leq \|\psi\| \sup\limits_{f \in F} \|f\| \Rightarrow C(F, \psi) \leq \|F\| \cdot \|\psi\|$

Свойства опорных функций:

1. $F \in \Omega(E^n) \Rightarrow C(F, \psi) = \max\limits_{f \in F} (f, \psi)$; F - ограничено, то $C(F, \psi) = C(\bar{F}, \psi)$
2. Положительная однородность по 2 аргументу: $C(F, \lambda\psi) = \lambda C(F, \psi) \forall \lambda \geq 0$
3. Полуаддитивность по 2 аргументу: $C(F, \psi_1 + \psi_2) \leq C(F, \psi_1) + C(F, \psi_2)$
4. Условие Липшица по 2 аргументу: $|C(F, \psi_1) - C(F, \psi_2)| \leq |F| \|\psi_1 - \psi_2\|$
5. Опорная функция лин преобр. Множества: $C(DF, \psi) = C(F, D^* \psi) \forall D \in R^{n \times n}, D^* = D^T$
6. Положительная однородность по 1 аргументу: $C(\lambda F, \psi) = \lambda C(F, \psi) \forall \lambda \geq 0$
7. Аддитивность по 1 аргументу: $C(F_1 + F_2, \psi) = C(F_1, \psi) + C(F_2, \psi)$
8. $C(F_1 \cup F_2, \psi) = \max \{ C(F_1, \psi), C(F_2, \psi) \}$
9. $C(F, \psi) = C(\operatorname{conv} F, \psi)$
10. $F_1, F_2 \in \Omega(E^n)$ тогда $F_1 \subset F_2 \Rightarrow C(F_1, \psi) \leq C(F_2, \psi) \Rightarrow \operatorname{conv} F_1 \subset \operatorname{conv} F_2$
11. $f \in E^n, F \in \Omega(E^n) \Rightarrow f \in F \Rightarrow (f, \psi) \leq C(F, \psi) \Rightarrow f \in \operatorname{conv} F$
12. $0 \in E^n, F \in \Omega(E^n) \Rightarrow 0 \in F \Rightarrow 0 \leq C(F, \psi) \Rightarrow 0 \in \operatorname{conv} F$
13. $F_1, F_2 \in \Omega(E^n)$, тогда $F_1 \cap F_2 \neq \varnothing \Rightarrow C(F_1, \psi) + C(F_2, -\psi) \geq 0 \Rightarrow \operatorname{conv} F_1 \cap \operatorname{conv} F_2 \neq \varnothing$

Опр 14. Расстояние Хаусдорфа между $F_1 \in \Omega(E^n)$ и $F_2 \in \Omega(E^n)$ - это неотрицательное число $h(F_1, F_2)$: $h(F_1, F_2) = \min\limits_{r \geq 0} \{ r : F_1 \subset F_2 + S_r(0); F_2 \subset F_1 + S_r(0) \}$

14. Условие Липшица по 1 аргументу: $|C(F_1, \psi) - C(F_2, \psi)| \leq \|\psi\| h(F_1, F_2)$